MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA LİSE SINIFLARINA YENİ DERS KİTABI OLARAK KABUL EDİLEN KİTAPLAR

Özdemir Sarıca - Ömer Özcan ve Mahir Ünlü
Türk Dili ve Edebiyatı I
Türk Dili ve Edebiyatı II
Kemal Demiray - M. Nihat Özön
Türk Dili ve Edebiyatı I
Türk Dili ve Edebiyatı II
Türk Dili ve Edebiyatı III
Mithat Sadullah Sander
Türkçe Dilbilgisi Dersleri I - III
Suut Kemal Yetkin ve Sıdıka Arıkan
Örnekleriyle Türk ve Batı Edebiyatı I
Örnekleriyle Türk ve Batı Edebiyatı II
Örnekleriyle Türk ve Batı Edebiyatı III
Bedriye Atsız - Hilmi Oran
Tarih I (İlkçağ)
Tarih II (Ortaçağ)
Tarih III (Yeni - Yakınçağ)
Fahriye Çetinkanat - Nerİman Serdarlar
Türkiye Cumhuriyeti Tarihi I - III
Arif Müfit Mansel - Oktay Aslanapa
Sanat Tarihi II
Oktay Aslanapa
Türk ve İslâm Sanatı III
Burhan Toprak
Sanat Tarihi II - III
Dr. Nurettin Seçkin
Coğrafya I (Genel)
Devletler Coğrafyası II
Turan Tanın
Aritmetik ve Cebir I
Cebir Dersleri II Fen
Cebir Dersleri II Ed.
Cebir Dersleri III Fen
Cebir Dersleri III Ed.
Geometri Dersleri I
Geometri Dersleri II Fen
Geometri Dersleri II Ed.
Geometri Dersleri III Fen

Hilmiye Dener
Aritmetik ve Cebir I
Aritmetik ve Cebir II Fen
Aritmetik ve Cebir II Ed.
Hilmi Dener - M. Nuri Karahöyüklü - B. V. Alpman
Cebir III (Fen kolu)
Cebir III (Edebiyat kolu)
Beşat Otman
Fizik I
Fizik II (Fen)
Fizik II (Ed.)
Fizik III (Fen)
Fizik III (Ed.)
Hayri Dener
Fizik Dersleri I
Fizik Dersleri II
Fizik Dersleri III (Fen)
Fizik Dersleri III (Ed.)
Ali Hikmet Tungay
Fizik I
İzzet Kemal Erksal
Kimya I
Kimya II (Fen)
Kimya II (Ed.)
Kimya III (Fen)
Kimya III (Ed.)
Lütfi Erçin - Numan Eken
Biyoloji I
Biyoloji II
Jeoloji III
Malik Adalan
Psikoloji II
İbrahim N. Özgür
Psikoloji II
Hatemi Senih Sarp
Psikoloji II
Felsefe III
Mantık III
Sosyoloji III
Turan Tanın - M. Erev
Astronomi (Ed.)

İNKILÂP ve AKA

Fiyatı 410 Kuruş

TURAN TANIN
GEOMETRİ DERSLERİ Lise I
İNKILÂP ve AKA

YENİ LİSE KİTAPLARI

Lise I

Geometri Dersleri

Lise I

Yazan:
TURAN TANIN
Matematik Öğretmeni

Liselerin birinci sınıf programına göre hazırlanmış ve Millî Eğitim Bakanlığınca ders kitabı olarak kabul edildiği Yayım Müdürlüğünün 22/Kasım/1966 tarih ve 16408/611.3-207 sayılı emriyle bildirilmiştir.

ON YEDİNCİ BASKI

İ·A

İNKILÂP ve AKA
KİTABEVLERİ Koll. Şti.
İstanbul, Ankara Cad. 95

YENİ LİSE KİTAPLARI

Geometri Dersleri

Lise I

Yazan:
TURAN TANIN
Matematik Öğretmeni

Liselerin birinci sınıf programına göre hazırlanmış ve Millî Eğitim Bakanlığınca ders kitabı olarak kabul edildiği Yayım Müdürlüğünün 22/Kasım/1966 tarih ve 16408/611.3-207 sayılı emriyle bildirilmiştir.

ON YEDİNCİ BASKI

İ·A

İNKILÂP ve AKA KİTABEVLERİ Koll. Şti.
İstanbul, Ankara Cad. 95

Neşriyatı devam ettiren:
Talia TANIN
İstanbul Kız Lisesi Matematik Öğretmeni

Matbaa tashihlerini yapan:
M. Kemal ÖZTUNÇ
İstanbul Yüksek Teknik Okulu
Öğretim Üyesi

NURGÖK MATBAASI
Ankara Caddesi No. 15
İSTANBUL — 1967

PROGRAM [*]

LİSE I

1. — İspatlı geometriye giriş:

Nokta, doğru, açı ve açı çeşitleri: Doğru ve açıların ölçülmesi, komşu ve bütünler açılar; ters açıların eşitliği. İki paralel doğruyu kesen bir doğrunun bunlarla yaptığı açılar; içters, yöndeş, dışters açıların eşitliği.

2. — Geometrinin dayandığı temel prensipler:

1) Tanımlar, 2) Aksiyom ve postulâtlar. Geometride ispat fikri, teorem kavramı. Karşıt teorem anlamı, paralellik postulâtı (Öklit postulâtı).

3. — Düzlem şekillerin tanımları ve adlandırılması:

a) Üçgenler: Üçgenlerde temel elemanlar, üçgenlerin çeşitleri.
b) Bir üçgende dış ve iç açılar ve bunlara ait teoremler. Bir doğrunun üzerindeki ve dışındaki bir noktadan bu doğruya çizilen dikme ve eğiklere ait teoremler.

4. — Simetri kavramı:

a) Bir doğru ve bir noktaya göre simetri, simetrik şekiller, ikizkenar üçgenlerde simetri ekseni ve özelliği, simetri eksenli dörtgen (Deltoit). Simetri yardımiyle temel çizimlerin yapılması.
b) Bir üçgende: Kenarlar ve kenarlarla karşılarındaki açılar arasındaki münasebetler.

5. — Eşitlik kavramı: Eşit şekiller. Bir üçgenin belli olma şartları. Üçgenlerin dört temel çizimi, üçgenlerde eşitlik teoremleri.

6. — Geometrik yer kavramı: Çeşitli geometrik yerler. Geometrik yerler yardımiyle üçgenlerin çizimi.

7. — Dörtgenler:

a) Dörtgenlerde temel elemanlar, dörtgen çeşitleri, bir çokgenin iç ve dış açıları toplamına ait teoremler.
b) Paralelkenar, dikdörtgen, eşkenar dörtgen, kare, yamuk gibi şekillerin özellikleri. Bir dörtgen, beşgen, çokgenin belli olma şartları.

---

[*] Bu program, 7/Ekim/1957 tarih ve 976 sayılı TEBLİĞLER DERGİSİ'nden alınmıştır.

8. — Üçgende kesişen doğrular (orta dikmeler, yükseklikler, açıortaylar, kenarortaylar).

9. — Dayire :

a) Dayirenin tanımı, geometrik yer olarak belirtilmesi. Dayirenin bellibaşlı elemanları : Merkez, çap, kiriş, teğet, yay, dayire dilimi, dayire parçası.

b) İki noktadan geçen dayireler. Bir doğru üzerinde bulunmıyan üç noktadan geçen dayire. Bir çemberde merkezin, çeşitli büyüklükteki kirişlere olan uzaklıklarının karşılaştırılması.

c) Teğet kavramı, bir çemberin bir noktasındaki teğeti. İki doğruya teğet olan dayireler.

d) Dayirede açılar : Merkez ve çember açılarının ölçülmesi. Bir çemberin dışındaki bir noktadan bu çembere çizilen teğetler. İki çemberin birbirine göre durumları. İki çemberin ortak teğetleri. Bir üçgenin iç ve dış teğet çemberleri.

e) Kirişler, teğetler dörtgeni ve bunlara ait özellikler.

10. — Eşdeğerli şekiller ve alanlar :

a) Düzlem şekillerin alanlarının hesabı ile ilgili teoremler (eşdeğerlilik halleri).

b) Kare, dikdörtgen, paralelkenar, üçgen ve yamuğun alanlarının hesabı. π sayısının tarifi. Dayirenin çevre ve alan formülleri (İspatsız olarak verilecektir.).

11. — Geometrik uzunluklarda oran ve orantı :

a) Paralel doğruların kesişen iki doğru üzerinde ayırdığı orantılı parçalar.

b) Tales teoremi ve bu teoremin üçgen ve yamuğa uygulanması.

c) Bir doğru parçasını içten ve dıştan belli bir orana gören bölen noktalar.

12. — Benzerlik kavramı :

a) Benzer şekiller. Üçgenlerin benzerlik halleri.

b) Üçgende açıortay teoremleri.

c) Benzerlik yoliyle dik üçgenlerde metrik münasebetlerin çıkarılması.

MÜNEVVER ÖZKAN
4-C No=219
Fizik Lisesi

BÖLÜM I

İSPATLI GEOMETRİYE GİRİŞ

1. GEOMETRİ ŞEKİLLERİ

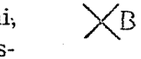
1. *Giriş.* — Üzerinde yaşadığımız Yer küresinin Ay ,Güneş ve yıldızlarla beraber içinde bulunduğu sonsuz boşluğa *uzay* denir.

Uzayın sınırlanmış olan bir parçasına *hacım* denir. Bu sınır, uzayı, iki kısma ayırır; bunlardan biri sınırın içinde kalan uzay parçası veya hacım, diğeri dışında kalan ve her yönden sonsuza doğru uzayıp giden uzay parçasıdır.

Bu iki uzay parçasında ortak olan kısma *yüzey* denir. Bir kitabın kapağı, bir lâstik topun yüzü, yüzeye örnek olabilir. Fakat geometride düşünülen yüzeylerin *hiç kalınlığı olmadığı* kabul edilir. Bir oyuncak lâstik balonu bize yüzey hakkında bir fikir verebilir.

İki yüzeyin ortak kısmına *çizgi* denir. Bir küpün kenarları, bir kurşun kalemin kâğıt üzerinde bıraktığı iz, çizgiye örnek olarak alınabilir. Fakat kalem ne kadar sivri uçlu olursa olsun kâğıt üzerindeki izinin bir kalınlığı vardır. Geometride düşünülen çizginin *hiç kalınlığı olmadığı* farzedilir.

İki çizginin ortak kısmına *nokta* denir. Noktanın eni, boyu ve kalınlığı yoktur. Kâğıt üzerinde × işaretiyle gösterilir ve yanına yazılan bir harfle adlandırılır. B noktası gibi (Şek. 1).



Şek. 1

ÇİZGİ VE YÜZEY ÇEŞİTLERİ

2. Geometride üç türlü çizgi vardır : 1° *Doğru*, 2° *Kırık çizgi*, 3° *Eğri.*

1° *Doğru.* — İki nokta arasındaki gergin bir ipin durumu doğru hakkında bir fikir verebilir (Şek. 2).

Şek. 2

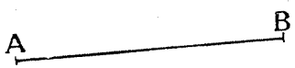
Aynı iki nokta arasına başka başka ipler gerilse bunların birbiriyle çakıştığı görülür. Ohalde :

İki noktadan ancak bir doğru geçer.

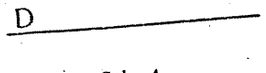
Buna göre farklı iki doğru birbirini ancak bir noktada kesebilir. Çünkü iki noktaları ortak olsaydı, iki noktadan ancak bir doğru geçeceği için bunlar çakışırlardı.

Üç türlü doğru vardır : *Doğru parçası, doğru, yarım doğru.* İki ucu sınırlanmış olan belli uzunluktaki doğru çizgilere *doğru parçası* denir (Şek 3).

Bir doğru parçası iki ucuna konulan iki harfle adlandırılır, AB doğru parçası gibi...



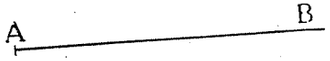
Şek. 3



Şek. 4

İki taraftan da sınırlanmamış, yani her iki tarafa istenildiği kadar uzatılabilen doğru çizgilere *doğru* denir (Şek. 4).

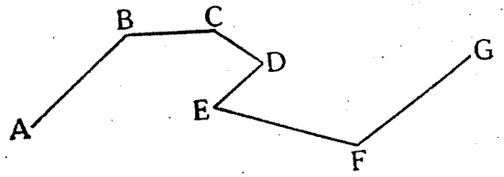
Bir doğru, üzerinde alınan herhangi iki noktaya konulan harflerle veya doğrunun yanına yazılan bir harfle adlandırılır. D doğrusu gibi..



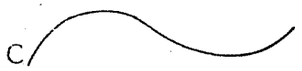
Şek. 5

Bir ucu belli bir nokta ile sınırlanıp, diğer tarafa doğru istenildiği kadar uzatılabilen doğru çizgilere *yarım doğru* denir (Şek. 5). AB yarım doğrusu gibi...

2° *Kırık çizgi.* — Bir doğru üzerinde olmamak şartiyle, uc uca gelen doğru parçaları bir *kırık çizgi* meydana getirirler. ABCDEFG kırık çizgisi gibi... (Şek. 6).



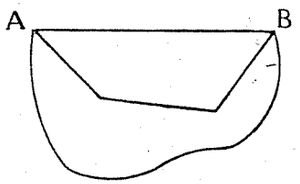
Şek. 6



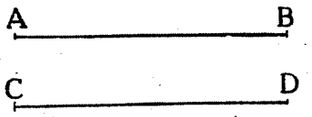
Şek. 7

3° *Eğri.* — Bir kırık çizgiyi meydana getiren doğru parçalarının küçüldüğünü farzedelim. Bu kırık çizgilerin uzunlukları sıfıra yaklaşırsa bir doğru üzerinde olmamak şartiyle hâsıl olan çizgiye *eğri* denir. Bir eğri yanına konulan harfle adlandırılır. C eğrisi gibi (Şek. 7).

İki noktadan bir doğru, bir kırık çizgi ve bir eğri geçirilecek olursa bunların en kısası doğrudur (Şek. 8).



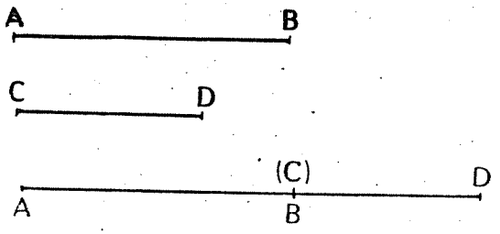
Şek. 8



Şek. 9

3. *Eşit doğru parçaları.* — AB ve CD doğru parçalarını gözönüne alalım. CD doğru parçasının C noktası A ya gelecek surette AB doğru parçası üzerine getirildiği zaman D noktası B ile çakışırsa bu iki doğru parçası *eşittir* denir (Şek. 9).

4. *Doğru parçalarının toplamı.* — AB ve CD doğru parçalarını toplamak için AB doğru parçası alınır. CD doğru parçası, C noktası B ye gelecek şekilde, AB nin uzantısına getirilecek olursa elde edilen



Şek. 10

AD doğru parçası AB ve CD doğru parçalarının toplamıdır (Şek. 10) ve şu şekilde yazılır :

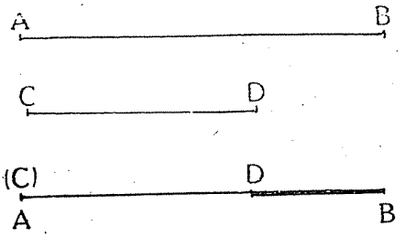
$$AC + CD = AD.$$

Eğer toplanacak doğru parçaları ikiden fazla ise, ilk ikisinin toplamına üçüncü katılarak ve bunların toplamına da dördüncü katılarak toplam elde edilir.

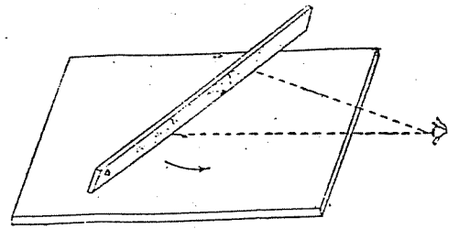
5. *İki doğru parçasının farkını bulmak.* — AB ve CD doğru parçalarının farkını bulmak için CD doğru parçasının C noktası, AB doğru parçasının A noktasına gelecek surette CD yi AB üzerine koyalım.

(AB > CD farzediliyor). DB doğru parçasına AB ve CD doğru parçalarının *farkı* denir (Şek. 11) ve şöyle yazılır:

$$AB - CD = DB.$$

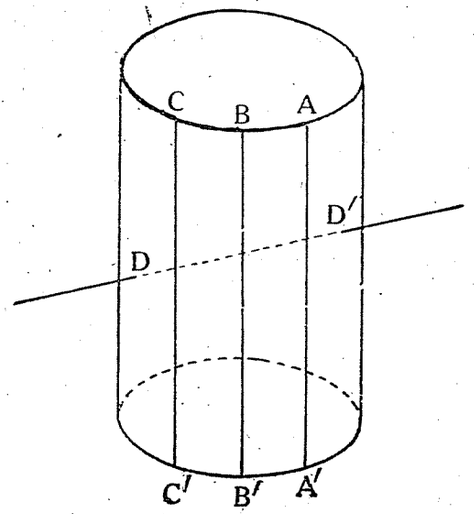


Şek. 11



Şek. 12

6. *Düzlem.* — Daha evvel bir kitabın kapağını, bir lâstik topun yüzünü, yüzeye örnek göstermiştik. Lâstik topun yüzeyinde alınan herhangi iki noktadan geçen doğru bu yüzeyle çakışmaz. Topun içinden geçer. Fakat kitap kapağı üzerinde alınan herhangi iki noktadan geçen doğru bu yüzeyle çakışır, yani doğrunun bütün noktaları yüzey üzerindedir. İşte böyle: Üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğrular ile çakışan yüzeylere *düzlem* denir (Şek. 12).



Şek. 13

Aynalar, pencere camları, yazı tahtaları, duvarlar düzleme örnek olabilirler.

Yuvarlak bir kurşun kalem veya bir soba borusu düşünelim. Bunların yüzeyi üzerinde alınan ikişer noktadan geçen ve bu yüzeylere çakışan doğrular vardır, AA′, BB′, CC′ gibi (Şek. 13). Fakat bu yüzeye düzlem diyemeyiz. Çünkü iki nokta arasını birleştirdiğimiz zaman bu yüzeyle çakışmıyan doğrular da vardır: DD′ gibi.

7. *Geometrik şekil.* — Yukarıda tanımları yapılan nokta, çizgi, yüzey ve hacımdan ibaret topluluğa *geometrik şekil* veya kısaca *şekil* denir.

Geometrik şekillerin kenar, köşe, açı ve yüzeylerinin bütün özelliklerinden ve birbirleriyle olan bağıntılarından bahseden ilme *geometri* denir.

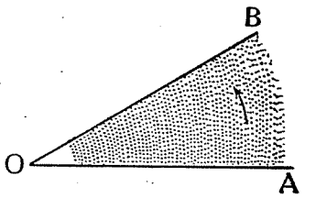
Geometrik şekillerin bazıları bir düzlem üzerine konuldukları zaman o düzlemle çakışırlar. Bunlara *düzlem şekiller* denir. *Üçgen, dörtgen, dayire* gibi...

Bir düzlem üzerine konuldukları zaman o düzlemle tamamen çakışmayan şekillere *uzay şekil* veya *cisim* denir. *Küp, piramit, küre* gibi...

Düzlem şekillerden bahseden geometriye *düzlem geometri;* uzay şekillerden bahseden geometriye de *uzay geometri* denir.

2. AÇI VE AÇI ÇEŞİTLERİ

8. *Tanımlar.* — Bir O noktasından çıkan çakışık iki yarım doğru alalım (Şek. 14). Bu yarım doğrulardan **biri sabit kalıp, diğeri** O noktası etrafında dönecek olursa, hareket eden yarım doğrunun taradığı düzlem parçasına *açı* denir. O noktası açının *köşesi*, OA ve OB de açının *kenarları*'dır.

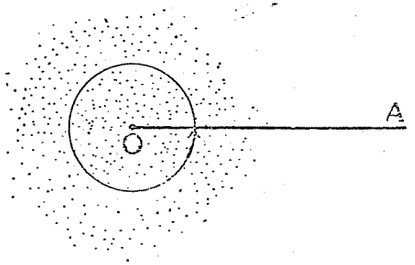


Şek. 14

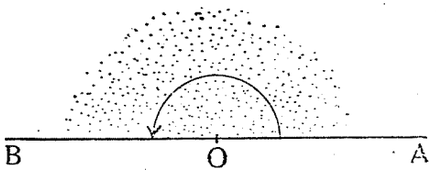
OA sabit kenarına açının *başlangıç kenarı*, açıyı çizen OB kenarına da açının *bitim kenarı* denir.

Başlangıç kenarından bitim kenarına olan ve ok ile gösterilen yöne de açının *yönü* denir.

9. *Tam ve doğru açı.* — OA yarım doğrusu O noktası etrafında tekrar kendi üstüne gelinceye kadar döndürülürse meydana gelen açıya *tam açı* denir (Şek. 15).



Şek. 15



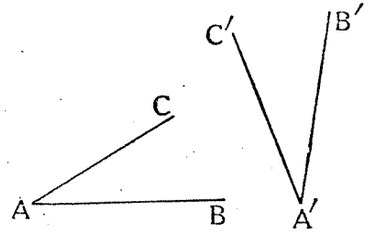
Şek. 16

Bir açının kenarlarından biri diğer kenarın uzantısında ise, bu açıya *doğru açı* denir (Şek. 16).

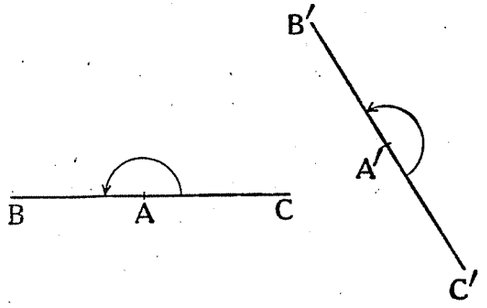
O açısının OA ve OB kenarları bir doğru üzerinde olup yine açı, AOB açısı diye okunur.

10. *Eşit açılar.* — Köşe ve kenarları üstüste çakışabilen açılara *eşit açılar* denir.

BAC ve B'A'C' açılarını alalım (Şe. 17). A' köşesi A köşesine gelmek üzere B'A'C' açısını BAC açısı üzerine getirelim. A'B' kenarı AB üzerine geldiği zaman A'C' de AC kenarının üzerinde bulunursa, iki açı eşittir.



Şek. 17

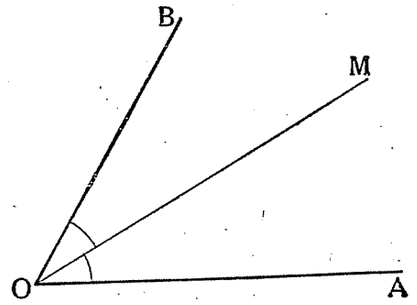


Şek. 18

11. *Teorem. — Bütün doğru açılar eşittir.*

BAC doğru açısı ile B'A'C' doğru açısını alalım (Şek. 18). A' köşesini A köşesine ve B'A' kenarını BA üzerine getirecek olursak, A'C' de AC kenarı ile çakışacağından bu iki açı eşittir.

12. *Bir açının ortayı.* — Bir açıyı iki eşit parçaya bölen yarım doğruya bu açının *açıortayı* denir.



Şek. 19

AOB açısını gözönüne alalım (Şek. 19). Eğer

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$$

ise, OM doğrusu AOB açısının açıortayıdır.

13. *Dik açı, açı birimi.* — Bir doğru açının yarısına *dik açı* denir ve açı birimi olarak alınır.

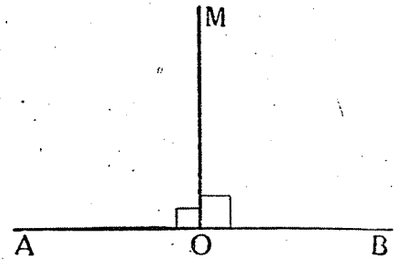
AOB doğru açısının OM açıortayını çizelim (Şek. 20):

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOB} = 1^D$$

dir.

14. *Teorem. — Bütün dik açılar eşittir.*

Bütün doğru açılar eşit olduğundan bunların yarıları olan dik açılar da eşittir.



Şek. 20

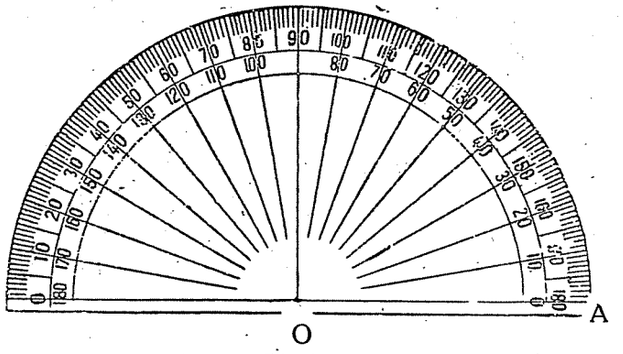
15. *Açıların ölçülmesi. Derece, Grad.* — Bir dik açının 1/90 ine 1 *derecelik açı* denir, 1° şeklinde yazılır. 1° lik açının 1/60 ine 1 *dakikalık açı* denir, 1′ şeklinde yazılır. 1′ lık açının 1/60 ine 1 *saniyelik açı* denir, 1″ şeklinde gösterilir.

Yine bir dik açının 1/100 ine 1 *gradlık açı*, bir gradlık açının 1/10 ine 1 *desigradlık açı*, 1 desigradlık açının 1/10 ine 1 *santigradlık açı* denir ve şu şekilde yazılırlar:

$$1^D = 100^G, \qquad 1^G = 10^{Dg}, \qquad 1^{Dg} = 10^{Sg}$$

Şuhalde bir doğru açı 180° veya 200^G dır.

16. *İletki.* — Bir yarım dayire, 180 eşit parçaya bölünürse, açıları derece cinsinden ölçen bir âlet elde edilir. Buna *iletki* denir (Şek. 21).



Şek. 21

Eğer grad cinsinden olmasını istersek yarım dayireyi 200 eşit parçaya bölmeliyiz.

Herhangibir açıyı ölçmek için iletkinin O noktası açı köşesi ve OA da açının bir kenarı ile çakıştırılır. Diğer kenarın iletki üzerinde gösterdiği sayı, açının ölçüsünü verir.

17. *Uygulama I.* — $A = 43° 42' 35''$, $B = 67° 53' 45''$, $C = 54° 45' 32''$ *olduğuna göre,*

$1°\ A+B+C$, $2°\ A+B-C$, $3°\ 3A$, $4°\ 2A-B+C$, $5°\ \frac{B}{6}$

değerlerini hesaplayınız.

$1°$ $A+B+C$ yi teşkil edelim :

$$\begin{array}{rrrr} A = & 43° & 42' & 35'' \\ B = & 67° & 53' & 45'' \\ C = & 54° & 45' & 32'' \\ \hline A+B+C = & 164° & 140' & 112'' \end{array}$$

bulunur. $60'' = 1'$, $60' = 1°$ olduğu düşünülerek, $112''$ ile $140'$ daki tam saniye ve dakikalar çevrilince :

$$\begin{array}{rrrr} A+B+C = & 164° & 140' & 112'' \\ = & 164° & 141' & 52'' \\ = & 166° & 21' & 52'' \end{array}$$

elde edilir.

$2°$ Evvelâ $A+B$ bulunur, toplamdan C çıkarılır.

$$\begin{array}{rrrr} A = & 43° & 42' & 35'' \\ B = & 67° & 53' & 45'' \\ \hline A+B = & 110° & 95' & 80'' \\ C = & 54° & 45' & 32'' \\ \hline A+B-C = & 56° & 50' & 48'' \end{array}$$

bulunur.

$3°$ Bir açının herhangibir katını bulmak için, verilen sayı ile saniye dakika ve derece çarpılır, sonra icap ediyorsa gerekli çevirmeler yapılır:

$$\begin{array}{rrrr} A = & 43° & 42' & 35'' \\ \times & & & 3 \\ \hline 3A = & 129° & 126' & 105'' \\ = & 129° & 127' & 45'' \\ = & 131° & 07' & 45'' \end{array}$$

bulunur.

$4°$ Evvelâ $2A$ bulunur, bu C ile toplanır. Bulunan toplamdan B çıkarılır. Eğer $2A > B$ ise, bulunan $2A$ dan B çıkarılıp sonra C yi ekliyebiliriz.

$$\begin{array}{rrrr} A = & 43° & 42' & 35'' \\ \times & & & 2 \\ \hline 2A = & 86° & 84' & 70'' \\ B = & 67° & 53' & 45'' \\ \hline 2A-B = & 19° & 31' & 25'' \\ C = & 54° & 45' & 32'' \\ \hline 2A-B+C = & 73° & 76' & 57'' \end{array}$$

bulunur Dakikadaki fazlalık çevrilince,

$$2A-B+C = 74° 16' 57''$$

elde edilir.

$5°$ $\frac{B}{6}$ yı bulmak için, açının dereceden başlıyarak derece, dakika ve saniyesi 6 ile bölünür. Her bölümde artan değer bir sonraki değere çevrilip, bölme işlemine devam edilir. Saniyede artan kalırsa, iki ondalık basamağa kadar bölme yapılır :

$$\begin{array}{rrrr} B = & 67° & 53' & 45'' \\ 67° : 6 = & 11° & \text{kalan} & 1° \\ 1° 53' = 113' \ ; \ 113' : 6 = & 18' & \text{»} & 5' \\ 5' 45'' = 345'' \ ; \ 345'' : 6 = & 57'',5 & & \end{array}$$

bulunur. Ohalde,

$$\frac{B}{6} = 11° 18' 57'',5$$

dir.

İhtar. — Saniye ve dakikalardaki çevirmeler, işlemin en sonunda yapılır.

II. — a) 99° lik bir açı kaç grad eder?

«90 derece 100 grad ise 99 derece kaç grad eder?» orantısından

$$G = \frac{99 \times 100}{90} = 110^g$$

bulunur.

b) 80 gradlık açı kaç derece eder?

«100 grad 90 derece ise, 80 grad kaç derece eder?» orantısından

$$D = \frac{80 \cdot 90}{100} = 72°$$

bulunur.

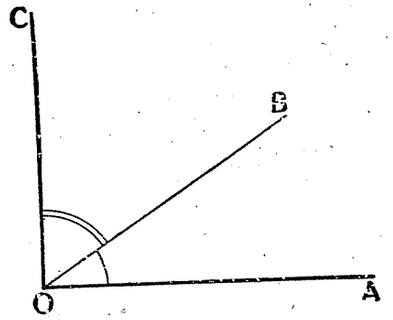
18. *Tanımlar.* — Bir dik açıdan küçük olan açılara *dar açı*, dik açıdan büyük olan açılara *geniş açı* denir.

İki açının toplamı bir dik açıya eşitse bunlardan herbirine, diğerinin *tümleri* denir.

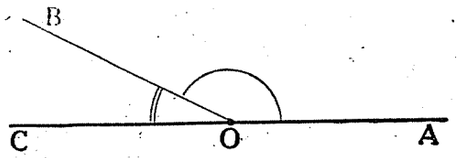
İki açının toplamı bir doğru açıya eşitse, bu açılardan herbirine, diğerinin *bütünleri* denir.

Bu tanımlardan dolayı aşağıdaki üç özelliği hemen söyliyebiliriz :

1° *İki komşu açı birbirinin tümleri ise, bunların ortak olmayan kenarları bir dik açı teşkil ederler* (Şek. 22).



Şek. 22

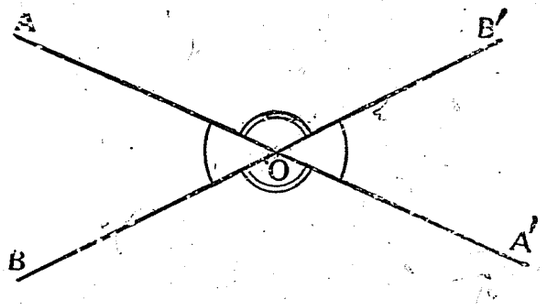


Şek. 23

2° *İki komşu açı birbirinin bütünleri ise, bunların ortak olmayan kenarlarından biri diğerinin uzantısındadır* (Şek. 23).

3° *Bir açı diğer iki açının herbirinin ayrı ayrı tümleri (veya bütünleri) ise, bu iki açı birbirine eşittir.*

19. *Ters açılar.* — İki açının kenarları biri diğerinin uzantısında ise, bu açılara *ters açılar* denir. AA′, BB′ doğruları bir O noktasında kesişirlerse AOB ile A′OB′ ve BOA′ ile AOB′ açıları ters açılardır.



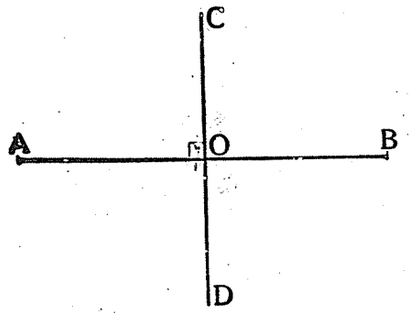
Şek. 24

20. *Teorem. — Ters açılar eşittir.*

AOB′ açısı, AOB ve A′OB′ açılarının bütünleri olduğundan bu iki açı eşittir (Şek. 24).

21. *Dik doğrular.* — İki doğrunun teşkil ettiği açılardan biri dik açı ise, bu doğrulara birbirine *diktir* denir.

AB ve CD doğrularının kesiştiklerini farzedelim (Şek. 25). AOC açısı bir dik açı ise, bu doğrular diktir.



Şek. 25

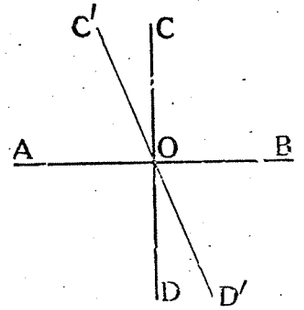
AOD ve COB açıları aynı AOC açısının bütünleri ve AOC dik açı olduğundan bu açılar da diktir. AOC ve DOB açıları ters açılar olduğundan birbirine eşit olup DOB açısı da bir dik açıdır. Şuhalde :

İki dik doğru 4 tane dik açı meydana getirir.

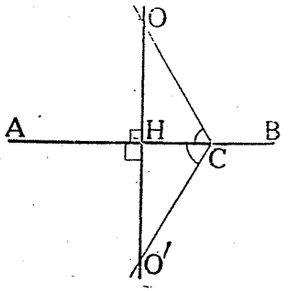
22. *Teorem. — Bir noktadan bir doğruya bir dikme çizilebilir, birden fazla çizilemez.*

1 inci hal. O noktası AB doğrusunun üzerindedir. — AOB doğru açısının OC açıortayını çizelim ve bunu doğrultusunda uzatalım (Şek. 26). CD doğrusu AB ye O noktasında diktir (No. 13). O noktasından çizilen başka bir C′D′ doğrusu AB ile biri dar, diğeri geniş olan iki açı yapar. Şuhalde AB doğrusuna O noktasında bir tane CD dikmesi çizilir.

2 nci hal. O noktası AB doğrusunun dışındadır. — Bir AB doğrusu ile bunun dışında bir O noktası alalım (Şek. 27). O yu AB etrafında



Şek. 26

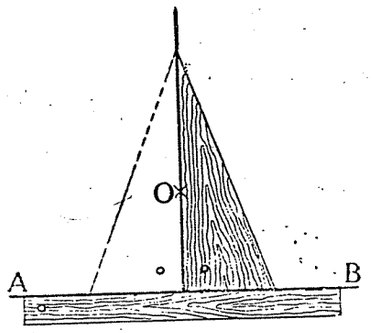


Şek. 27

180 derece çevirelim; O′ noktasına geldiğini farzedelim. O ve O′ yü birleştirelim; OO′ doğrusunun AB yi kestiği nokta H olsun.

AHO ve AHO′ açıları çevirme zamanında kenarları üst üste geldiğinden eşittirler. Bu iki açı birbirinin aynı zamanda bütünleri olduklarından dik olup OH doğrusu AB ye diktir.

Bu dikin bir tane olduğunu yani OC nin AB ye dik olamıyacağını gösterelim: Bu çevirme zamanında ACO açısı ACO′ açısına eşittir; fakat O, C, O′ noktaları bir doğru üzerinde olmadıklarından birbirinin bütünleri değildir. Şuhalde ACO açısı dik açı değildir; bundan dolayı da OC, AB ye dik değildir.

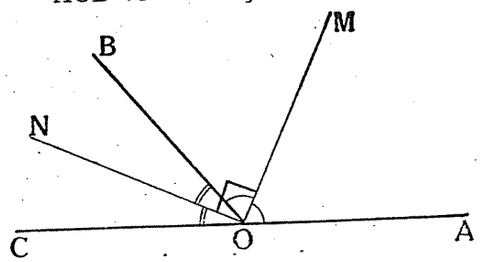


Şek. 28

İhtar. — Tatbikatta bir doğruya dik çizmek için *gönye* denilen çizim âleti kullanılır. Bir AB doğrusu ve bunun dışında bir O noktası alalım. Bir cetvelin bir kenarı AB ye çakışmak üzere alınır (Şek. 28). Gönyenin dik kenarlarından biri cetvel kenarı üzerine gelmek üzere kaydırılır. Gönyenin ikinci dik kenarı O dan geçtiği zaman bu dik kenar dik doğrudan geçtiği için hemen dikme çizilir.

23. *Teorem. — Birbirinin bütünleri olan iki komşu açının açıortayları birbirine diktir.*

AOB ve BOC açıları birbirinin bütünleri iki komşu açı ve bunların açıortayları OM ve ON olsun (Şek. 29). Bu iki açının toplamı iki dik açıdır. Bunların yarıları olan MOB ve BON açılarının toplamı da bir dik açı olur. Ohalde bu iki açının toplamı olan MON açısı bir dik açı olup OM ve ON birbirine diktir.



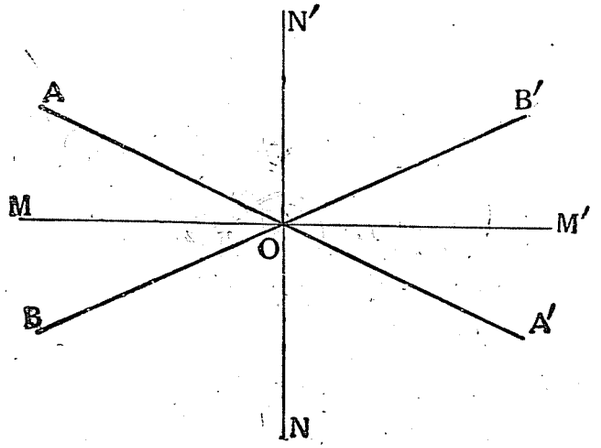
Şek. 29

24. *Sonuç. — Kesişen iki doğrunun teşkil ettiği dört açının açıortayları birbirine dik iki doğrudur.*

Kesişen iki doğru AA′, BB′ ve bunların kesim noktaları O olsun

(Şek. 30). AOB, BOA′, A′OB′ ve B′OA açılarının açıortayları OM, ON, OM′ ve ON′ olsun.

Yukarıdaki teoreme göre MON, NOM′, M′ON′ ve N′OM açıları dik açıdır. AOB, A′OB′ ters açılarının açıortayları olan OM ve OM′; AOB′ ve A′OB ters açılarının da açıortayları olan ON′ ve ON biri



Şek. 30

diğerinin uzantısıdır. Ohalde MM′ ve NN′ açıortayları O noktasında 4 tane dik açı meydana getirir. Şuhalde bunlar birbirine diktir.

PARALEL DOĞRULAR

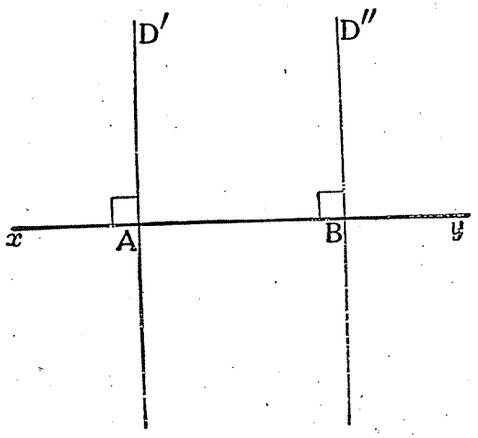
25. *Tanım.* — Bir düzlem içinde olup kesişmiyen iki doğruya *paralel doğrular* denir.

26. *Teorem. — İki doğru aynı bir doğruya dik ise, bu iki doğru birbirine paraleldir.*

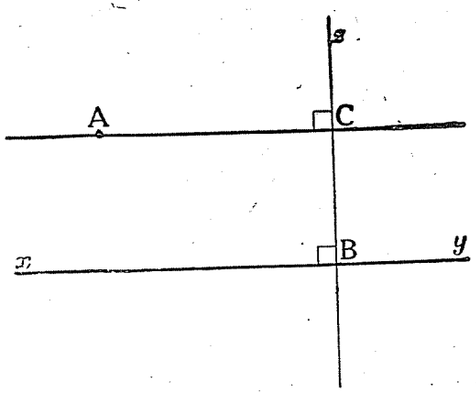
xy doğrusuna dik olan iki doğru D′ ve D″ olsun (Şek. 31).

D′, D″ birbirine paralel olmasa bu iki doğru bir M noktasında kesişir. Bu takdirde M noktasından *xy* doğrusuna iki dikme çizilmiş olur ki mümkün değildir (No. 22). Şuhalde D′, D″ kesişmezler. Bundan dolayı bu iki doğru paraleldir.

27. *Sonuç. — Bir doğrunun dışında alınan bir noktadan bu doğruya bir paralel çizilebilir.*



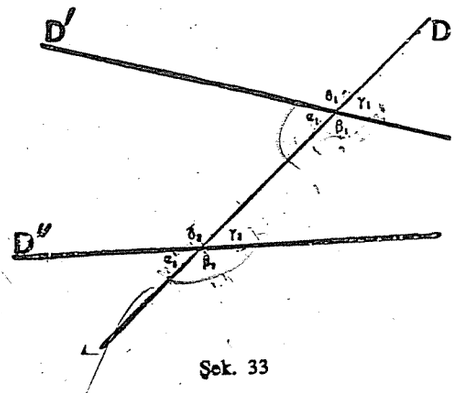
Şek. 31



Şek. 32

xy doğrusuna dik Bz doğrusunu çizelim (Şek. 32). A noktasından Bz ye dik AC doğrusunu çizersek, Bz doğrusuna dik olan xy ve AC doğruları birbirine paraleldir.

28. *Tanımlar.* — Bir düzlem içinde D′, D″ gibi iki doğru alalım. İki doğruyu bir D doğrusu ile kesecek olursak, sekiz açı meydana gelir. Bunlardan dördünü D ile D′, diğer dördünü D ile D″ hasıl eder (Şek. 33).



Şek. 33

Bu açılardan dördü D nin bir tarafında, dördü de diğer tarafındadır.

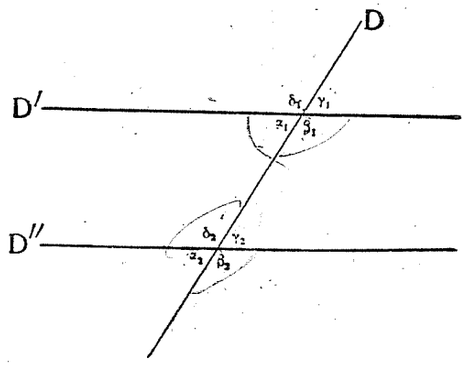
α_1, β_1, γ_2, δ_2 açılarına *iç açılar*; α_2, β_2, γ_1, δ_1 açılarına *dış açılar*; α_1 ile α_2, β_1 ile β_2, γ_1 ile γ_2, δ_1 ile δ_2 açılarına *yöndeş açılar*; α_1 ile γ_2, β_1 ile δ_2 açılarına *içters*; γ_1 ile α_2, δ_1 ile β_2 açılarına da *dışters açılar* denir.

D nin aynı tarafında fakat D′ ve D″ nün farklı tarafında bulunan iki açıya *karşı durumlu açılar* (α_1 ile δ_2 gibi); D nin farklı taraflarında fakat D′ ile D″ nün aynı tarafında bulunan iki açıya *yan durumlu açılar* denir (α_1 ile β_2 gibi).

29. *Eucleides (Öklit) postulâtı.* [*] —

İki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse yöndeş açılar eşit olur.

D′ ve D″ doğrularını birbirine paralel farzedelim. Şek. 34 de görüldüğü üzere dört çift yöndeş açı vardır. Bunlardan bir çiftin eşitliğini kabul etmek yeter. Meselâ $\alpha_1 = \alpha_2$ kabul edersek bunların sıra ile tersleri olan γ_1 ve γ_2 açıları da eşit olur; yine α_1 ve α_2 yi bütünleyen β_1, β_2 açıları ve δ_1, δ_2 açıları da eşit olur.



Şek. 34

30. *Sonuçlar. — İki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse:*

1° *İçters ve dışters açılar eşit olur.*

2° *Karşı durumlu açılar birbirinin bütünleridir.*

3° *Yan durumlu açılar birbirinin bütünleridir.*

1° α_1 ve γ_2 içters açılarını alalım (Şek. 34). α_2 açısı γ_2 nin tersi olduğundan γ_2 ye eşittir. Esasen α_1 açısı α_2 açısına eşit olduğundan (No. 29) α_1 açısı da γ_2 açısına eşittir. Diğer çiftlerin eşitliği de aynı şekilde gösterilir.

2°, 3° Karşı durumlu olan α_1, δ_2 açılarını gözönüne alalım. α_2 açısı δ_2 nin bütünleri olduğundan α_2 nin eşiti olan α_1 de δ_2 nin bütünleridir (No. 29).

Diğer karşı durumlu açı çiftleriyle yan durumlu açı çiftleri için ispat aynı şekilde tekrarlanır.

31. *Karşıt önermeler. — İki doğruyu üçüncü bir doğru kesince:*

1° *Yöndeş iki açı eşitse doğrular paraleldir.*

2° *İçters ve dışters iki açı eşitse doğrular paraleldir.*

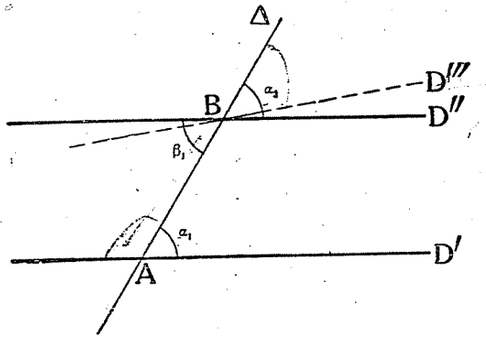
[*] No. 37 yi okuyunuz.

3° *Karşı durumlu iki açı bütünlerse doğrular paraleldir.*

4° *Yan durumlu iki açı bütünlerse doğrular paraleldir.*

1° Δ doğrusu D″ ve D′ doğrularını kesmiş olsun (Şek. 35). $\alpha_1 = \alpha_2$ ise D′ ve D″ doğrularının paralel olduğunu göstermek istiyoruz.

Bir an için D′ ve D″ nün paralel olmadığını farzedelim ve B noktasından D′ ye, D‴ paralelini çizelim. Bu takdirde D‴ ün de Δ ile teşkil ettiği ΔBD‴ açısı α_1 açısına, dolayısiyle α_2 açısına eşit olur (No. 29). Şuhalde D‴ doğrusu D″ ile çakışacağından D″ doğrusu D′ doğrusuna paraleldir.



Şek. 35

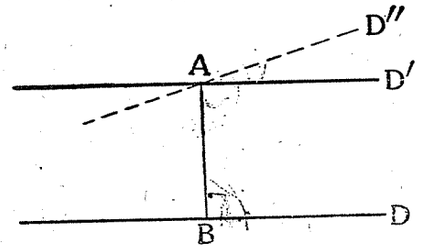
2° $\alpha_1 = \beta_1$ ise D′, D″ doğruları paraleldir. Çünkü β_1 in tersi olan α_2 de α_1 e eşittir. Yöndeş açılar eşit olduğundan D′ ve D″ birbirine paraleldir (1°).

3° Karşı durumlu açılardan birinin bütünleri alınırsa iki yöndeş açının eşitliği elde edilir. Ohalde D′, D″ birbirine paraleldir.

4° Yan durumlu açılardan birinin bütünleri alınırsa iki yöndeş açının eşitliği elde edilir. Şuhalde D′, D″ birbirine paraleldir.

32. *Teorem. — Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir.*

1° Bir D doğrusu ile bu doğrunun dışında bir A noktası alalım (Şek. 36).



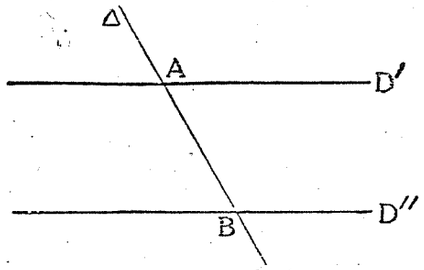
Şek. 36

A noktasından D ye AB dikmesini ve AB ye de A noktasından D′ dikmesini çizelim. AB doğrusuna dik olan D ve D′ doğruları birbirine paraleldir (No. 26).

2° A noktasından D doğrusuna D″ gibi ikinci bir paralel doğru çizildiğini farzedelim. D′AB ve D″AB açılarının her ikisi de DBA açısının bütünleri olduğundan (No. 30, 2°), bu açılar birbirine eşit olup D″ ve D′ doğruları çakışıktır.

33. *Sonuçlar. I. — Paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser.*

D′ ve D″ birbirine paralel iki doğru olsun (Şek. 37). Bir Δ doğrusu D′ yü herhangibir A noktasında keserse D″ yü de bir B noktasında keser.



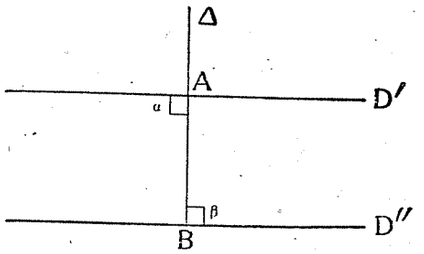
Şek. 37

Çünkü, D′ yü kesen Δ doğrusu D″ yü kesmezse D″ ye paralel olur. Bu takdirde A noktasından D″ ye D′ ve Δ paralel doğruları çizilmiş olur ki mümkün değildir (No. 32).

Şuhalde Δ doğrusu D″ yü de bir B noktasında keser.

II. — Paralel iki doğrudan birine dik olan bir doğru diğerine de diktir.

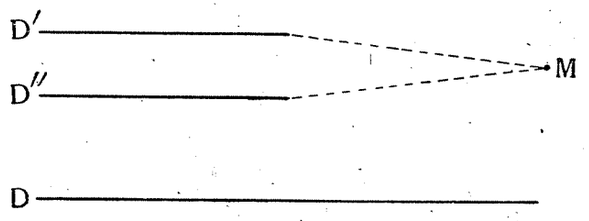
D′ ve D″ paralel iki doğru olsun (Şek. 38). Bir Δ doğrusu D′ ye A noktasında dik ise, D″ ye de diktir. Çünkü, D′ yü A noktasında kesen Δ doğrusu D″ yü de bir B noktasında keser (No. 33 Netice I). α ve β içters açıları eşit olur. $\alpha = 1^D$ olduğundan $\beta = 1^D$ olup Δ doğrusu D″ ye de dik olur.



Şek. 38

III. — Aynı bir doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.

D′ ve D″ doğrularının D doğrusuna paralel olduklarını farzedelim (Şek. 39). Bunların da birbirine paralel olduklarını göstereceğiz.

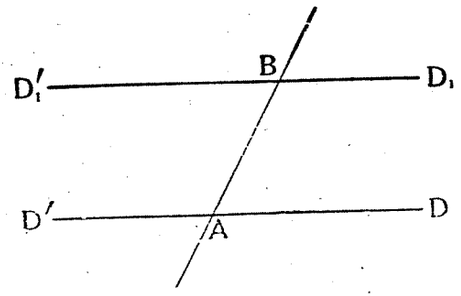


Şek. 39

Şayet D′ ve D″ birbirine paralel olmasa bunlar bir M noktasında kesişir. M noktasından D doğrusuna D′ ve D″ gibi iki paralel doğru çizilmiş olur ki mümkün değildir. Şuhalde D′, D″ birbirine paraleldir.

KENARLARI PARALEL VE DİK AÇILAR

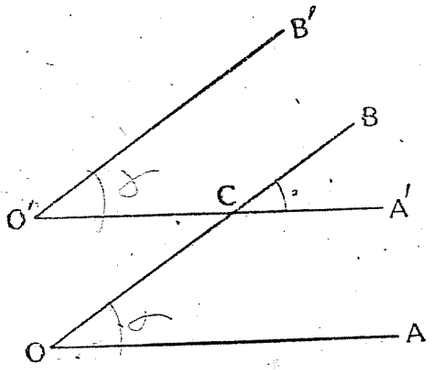
34. *Tanım.* — D′D ve $D_1'D_1$ paralel doğrularının her biri üzerinde A ve B noktalarını alalım (Şek. 40). AB nin aynı tarafında kalan yarım doğrulara *aynı yönde paralel doğrular* denir (AD, BD_1 gibi); AB doğrusunun farklı taraflarındaki yarım doğrulara *ters yönde paralel doğrular* denir (AD', BD_1' gibi).



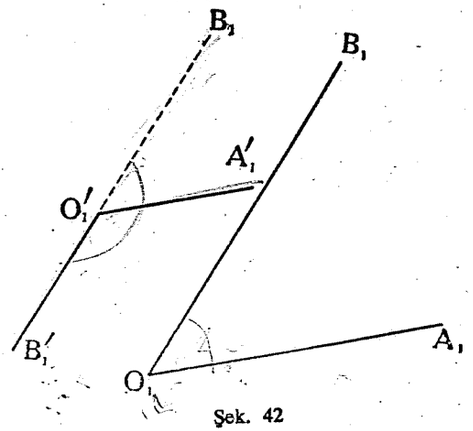
Şek. 40

35. *Teorem.* — *Bir açının kenarları, diğer bir açının kenarlarına aynı veya ters yönde paralelse, bu iki açı birbirine eşittir. Eğer bu iki açının kenarlarından biri aynı yönde diğeri ters yönde paralelse, bu açılar birbirinin bütünleridir.*

O ve O′ açılarının OA ve O′A′ ile OB ve O′B′ kenarlarının aynı yönde paralel olduklarını farzedelim (Şek. 41). OB ve O′B′ paralel olduklarından O′A′, OB yi bir C noktasında keser. Paralel doğrularda yöndeş açılar eşit olduklarından $\widehat{O}=\alpha$ ve $\widehat{O'}=\alpha$ olup $\widehat{O}=\widehat{O'}$ dür.



Şek. 41

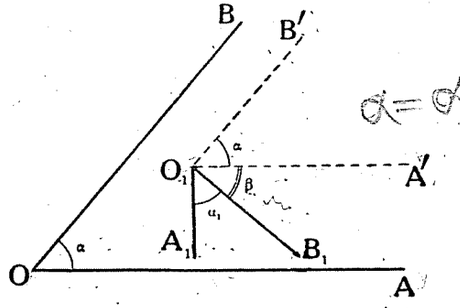


Şek. 42

O_1 ve O_1' açıları kenarlarından biri aynı yönde diğeri ters yönde paralel iki açı olsun (Şek. 42). Bunlar birbirinin bütünleridir. Çünkü $O_1'B_1'$ i uzatırsak O_1 ve $A_1'O_1'B_2$ açıları kenarları aynı yönde paralel açılar olduklarından eşittir. $A_1'O_1'B_2$ ve O_1' açıları birbirinin bütünleri olduklarından O′ ve O_1' de birbirinin bütünleridir.

36. *Teorem.* — *Bir açının kenarları, diğer bir açının kenarlarına sırasiyle dikse, iki açı ya birbirine eşittir veya birbirinin bütünleridir.*

O_1A_1 ile OA ve O_1B_1 ile OB birbirine dik olmak üzere $\widehat{AOB}=\alpha$, $\widehat{A_1O_1B_1}=\alpha_1$ açılarını alalım (Şek. 43 ve 44). O_1 noktasından OA ve OB ye aynı yönde paralel O_1A' ve O_1B' doğrularını çizelim. $\widehat{AOB}=\widehat{A'O_1B'}=\alpha$ dır (No. 35). OA ve O_1A' birbirine paralel olduğundan OA ya dik olan O_1A_1 doğrusu O_1A' ye de diktir (No. 33, Netice II).



Şek. 43

Aynı sebeplerle O_1B_1 doğrusu O_1B' ye diktir. $\widehat{B_1O_1A'}=\beta$ diyecek olursak Şek. 43 e göre

$\alpha_1+\beta=1^D$; $\alpha+\beta=1^D$

olup

$$\alpha=\alpha_1$$

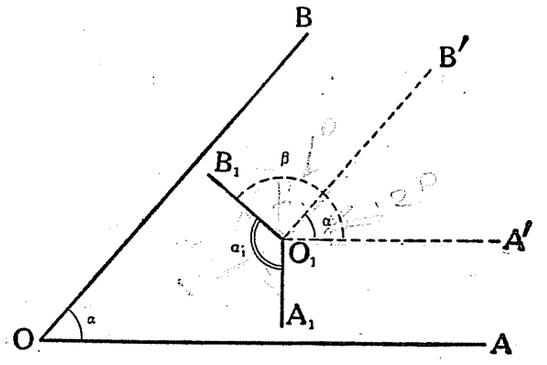
ve Şek. 44 e göre

$\alpha_1+\beta=3^D$; $\beta-\alpha=1^D$

olup, taraf tarafa çıkarılırsa

$$\alpha+\alpha_1=2^D$$

elde edilir.



Şek. 44

İhtar. — Açılar aynı cinsten yani her ikisi de dar veya geniş açı iseler eşit; aksi cinsten iseler birbirinin bütünleridir.

GEOMETRİNİN DAYANDIĞI TEMEL PRENSİPLER

37. Umumî hayatta her kelimeyi tarif etmek kabil olmadığı gibi, her hükmü ispat etmek de mümkün değildir. Bir kelime başka kelimelerle tarif edilir, bu sonuncu kelimeler de başka kelimelerle tarif edilir, ilâh... Böylece her kelimeyi tarif için sonsuz geriye gitmek icap etmektedir ki, bunun imkânsız olduğu meydandadır. Bunun gibi, geometride de, bir teorem başka teoremle, o teoremler de başkalariyle,... ispat edilir ve her şeyi ispat için imkânsız olan bir sonsuz geriye gitmek lâzım geldiğinden, ister istemez bir yerde durmak icap eder. Şuhalde nasıl tarif edilmeyen şeyler varsa, ispat edilemeyen şeyler de vardır. İspat edilemeyen bu şeylere Matematikte, *Prensipler* adı verilir.

Gerçi prensipler ispat edilmezler, fakat her şey bunlara dayanarak ispat edilir. Bunların ispatsız kabul edilmelerinin sebebi budur.

Matematiğe ait sistematik eserleri meydana getiren eski-Yunan Matematikçileri, bazı hükümleri ispatsız kabul etmek lâzım geldiğini anlamışlardır. Meselâ Yunan Matematikçisi *Eucleides (Öklit), «Elemanlar»* adlı eserinin başında, bu gibi hükümleri ifade etmekten geri kalmıyarak, bunlara *kabulü istenen şeyler* adını veriyor ve adına izafe edilen postulâtını kabul ediyor [*].

Matematikçiler geometrideki prensipleri birbirinden ayrı vasıfta gösteren üç sınıfta toplarlar :

1° Tanımlar, *2° Aksiyomlar,* *3° Postulâtlar.*

1° *Tanımlar.* — Tanım, belirli bir özelliğe malik olan şeye ad koymaktır. Bu adla anılan varlıkta, belirli özelliğin mevcut olacağı kabul edilecektir.

2° *Aksiyomlar.* — Bunlar aklımız için apaçık olduklarından, ispat edilmeye ihtiyaçları olmayan hükümlerdir. Bunların aksini düşünmek bizi mantıksızlığa götüreceğinden, imkânsızdır. Meselâ: *«Bütün, parçalarının her birinden büyüktür»*, hükmü aksiyoma bir örnektir. Aksini düşünmek bizi mantıksızlığa götürür.

[*] «Elemanlar» adlı eserinde postulât: «Bir doğrunun dışındaki bir noktadan bu doğruya yalnız bir paralel çizilebilir» şeklindedir. Bizim Öklit postulâtı diye koyduğumuz önergenin bununla özdeşliği aşikârdır.

3° *Postulâtlar.* — Bunlar da aksiyomlar gibi ispat edilmezler, fakat onlar gibi apaçık değildirler. Bunların aksini düşünmek bizi çelişmeye götürmez. Aksiyomlar genel oldukları halde bunlar özeldirler.

38. *Teorem.* — Doğruluğu için ispata ihtiyacı olan matematik gerçeklere *teorem* denir.

Matematikte hakikatler ispat yolu ile kurulur. Daha açıkçası ispat edilmedikçe hiç bir hakikat matematikte yer alamaz. Bunun için matematiğin metodu ispattan başka bir şey değildir.

Ohalde ispat ne demektir? Bir teoremin ispatlanmış sayılması için ne gibi şartları gerçeklemelidir? Bunu inceleyelim :

Herhangibir teorem iki kısımdan teşekkül eder :

1° Hipotez, 2° Hüküm.

Her teorem bazı şartlar altında bir iddiayı ihtiva eder. Bu şartlara *hipotez* ve iddiaya da *hüküm* denir.

Bir örnek alalım : Yukarıda ispatladığımız «Paralel iki doğrudan birine dik olan bir doğru diğerine de diktir» teoreminde : «İki doğrunun birbirine paralel ve üçüncü doğrunun bunlardan birine dik oluşu» hipotez; «üçüncü doğrunun diğer doğruya da dik oluşu» hükümdür.

Bir teoremin ispatı yapılırken hipotez ve hükmü ayırdetmeli ve hakikate ulaşmak için hipotez şartlarını daima gözönünde tutmalıdır.

Geometride bir teoremin ispatı dört nevi bilgiden bir veya bir kaçına dayanarak yapılır. İspat yapılırken bir iddianın aşağıda sayacağımız bu dört nevi bilgiden birine dayanması gerektiğine çok dikkat edilmelidir; aksi halde ispat yapılmış sayılmaz. İspatta dayanılan dört çeşit bilgi şunlardır :

1° Aksiyomlar, 2° Tanımlar, 3° Hipotezler, 4° İspatlanan teoremden evvel gelen teoremler.

39. *Karşıt teorem. Sonuç. Yardımcı teorem.* — Bir teoremde hüküm hipotez ve hipotez de hüküm yapılarak elde edilen teoreme *karşıt teorem* denir.

Bir teoremin ispatı yapılırken yeni bir özellik ortaya çıkabilir veya kısa bir muhakeme ile kurulabilir. Böyle bir önermeye *sonuç* denir. *Sonuç* aynen bir teorem mahiyetini taşır.

Bir teoremin ispatından evvel bilhassa bu teoremin ispatına yarıyacak bir teorem ispatlanır; bu teoreme *yardımcı teorem* denir.

I. ALIŞTIRMALAR

1. $A = 48° 53' 28''$, $B = 13° 24' 34''$, $C = 67° 27' 14''$ olduğuna göre

1° $A + B + C$, 2° $2A + B - C$, 3° $4C + 2B - A$, 4° $\frac{3A + B - 2C}{6}$

değerlerini hesap ediniz.

2. Aşağıdaki dereceleri grad cinsinden ifade ediniz:

28°, 44°, 112°, 145°, 170°.

3. Aşağıdaki gradları derece cinsinden ifade ediniz:

18^G, 67^G, 89^G, 125^G, 190^G.

4. İki komşu açının toplamı 100° dir. Bunların açıortayları kaç derecelik açı yaparlar?

5. OA, OB, OC, OD gibi sıra ile çizilen dört yarım doğru,

$$\widehat{DOA} = \widehat{COB} = 2\,\widehat{AOB} \quad \text{ve} \quad \widehat{COD} = 3\,\widehat{AOB}$$

olmak üzere açılar yapmaktadırlar. Bu açıları hesaplayınız; AOB ve COD açılarını açıortaylarının aynı doğru olduğunu ispatlayınız.

6. Tersaçıların açıortaylarından birinin diğerinin uzantısı olduğunu ispatlayınız.

7. Paralel iki doğru üçüncü bir doğru ile kesiliyor:

1° Yöndeş ve terseş açıların açıortaylarının birbirine paralel olduklarını gösteriniz.

2° Kesenin bir tarafındaki iç açıların açıortaylarının birbirine dik olduklarını gösteriniz.

8. $\widehat{AOB} = 120°$, $\widehat{AOC} = 86°$ olmak ve OC, AOB açısının içinde bulunmak üzere AOB ve AOC açıları çiziliyor. Bu iki açının açıortaylarının teşkil ettiği açı kaç derecedir?

BÖLÜM II

DÜZLEM ŞEKİLLERİN TANIMLARI VE ADLANDİRİLMASI

40. *Tanımlar.* — 1° Bir düzlem üzerine konulduğu zaman, her noktası o düzlemle çakışan şekle, *düzlem şekil* ve bir düzlemin tamamiyle sınırlanmış parçasına *kapalı şekil* denir (No. 7).

2° Bir şekil sınır çizgilerine göre adlandırılır. Meselâ *üçgen, dörtgen, çokgen, çember...* gibi.

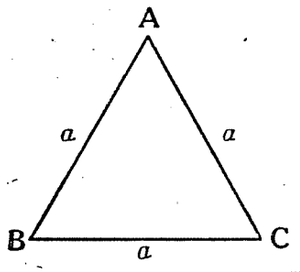
Üçgen üç doğru parçasının sınırladığı şekil, *n*-gen *n* doğru parçasının sınırladığı şekildir, buna *çokgen* denir. Bu doğru parçaları çokgenin *kenarları,* iki kenarın kesim noktaları *köşeleri,* bitişik iki kenar arasındaki açı *iç açı* ve iç açıları bütünleyen komşu açıları da çokgenin *dış açıları* dır.

Bir çokgenin herhangibir kenarı uzatılınca, şekil bu kenarın bir tarafında kalırsa, bu çokgene *içbükey çokgen;* ikiye bölünürse, bu çokgene de *dışbükey çokgen* denir.

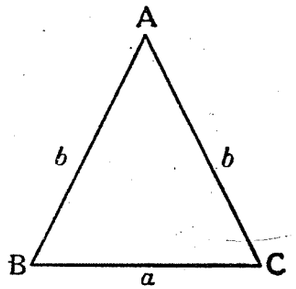
ÜÇGENLER

41. *Üçgenlerde temel elemanlar.* — Bir üçgende üç kenar, üç köşe, üç açı, ikişer ikişer ters altı tane dış açı vardır. Bir üçgenin 3 kenar ve 3 açısına birden *üçgenin elemanları* denir.

Bir üçgenin herhangibir kenarına bazan *taban* adı verilir; bu takdirde üçgenin tabanına karşı gelen köşesine üçgenin *tepesi,* tepedeki



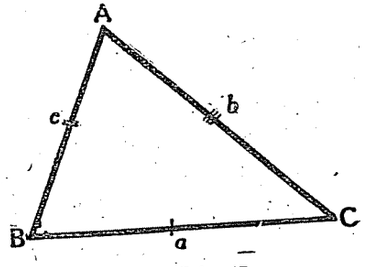
Şek. 45



Şek. 46

açıya da *tepe açısı* denir. Tabanın köşelerinde bulunan açılara da *taban açıları* adı verilir.

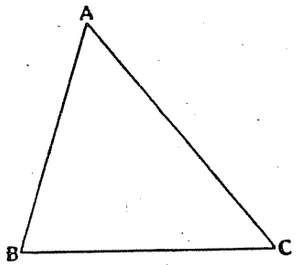
42. *Üçgenlerin çeşitleri.* — Üçgenler, kenarlarına ve açılarına göre iki türlü sınıflandırılır:



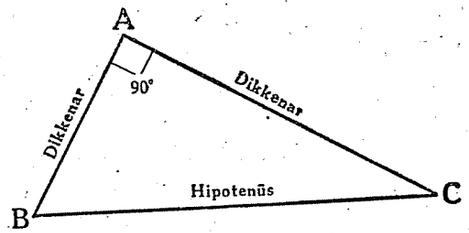
Şek. 47

43. *Kenarlarına göre ayrılış.* — Üç kenarı birbirine eşit olan üçgene *eşkenar üçgen* (Şek. 45), iki kenarı eşit olan üçgene *ikizkenar üçgen* (Şek. 46), kenarları eşit olmayan üçgene de *çeşitkenar üçgen* denir (Şek. 47).

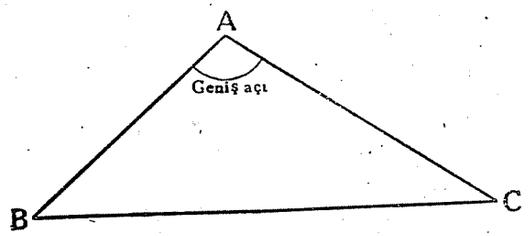
44. *Açılarına göre ayrılış.* — Bütün açıları dar açı olan üçgenlere *dar üçgen* (Şek. 48), bir açısı dik açı olan üçgene *dik üçgen* (Şek. 49), bir açısı geniş açı olan üçgene de *geniş üçgen* (Şek. 50) denir.



Dar üçgen
Şek. 48



Dik üçgen
Şek. 49



Geniş üçgen
Şek. 50

Dik üçgenin dik açısı karşısındaki kenara *hipotenüs*, dar açıların karşısındaki kenarlara da *dik kenarlar* denir.

Bir dik üçgenin dik kenarları eşitse bu üçgene *ikizkenar dik üçgen* denir.

45. *Üçgen elemanlarının gösterilişi.* — Üçgenin açıları köşelerindeki harfin üstüne $\frown$ işareti konarak gösterilir. Meselâ, ABC üçgeninin açıları $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ dir. Yükseklikleri h_a, h_b, h_c; kenarortayları v_a, v_b, v_c; iç ve dış açıortayları n_A, n_B, n_O, n_A', n_B', n_O' şeklinde gösterilir.

ÜÇGENİN İÇ VE DIŞ AÇILARI

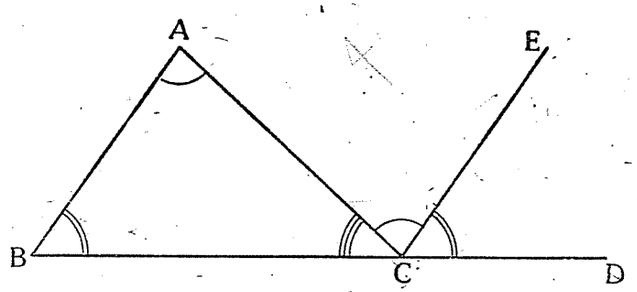
46. *Teorem. — Bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir.*

Herhangibir ABC üçgeni alalım (Şek. 51); BC kenarını uzatalım, üçgenin C köşesinden AB ye CE paralelini çizelim. BAC ve ACE açıları içters açılar, ABC ve DCE açıları da yöndeş açılar olduklarından eşittir. Ohalde üçgenin üç açısı toplamı BD doğrusunun C noktası etrafında toplanan açıların toplamına eşit olduğundan

$$A + B + C = 2^D$$

bulunur.

47. *Sonuçlar. I. — Bir üçgenin bir dış açısı kendine komşu olmayan iç açıların toplamına eşittir.*



Şek. 51

ABC üçgeninin ACD dış açısı ACE ve ECD açılarının toplamına eşittir. Şek. 51 de görüldüğü üzere

$$\widehat{ACE} + \widehat{ECD} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

olup üçgenin, C açısının ACD dış açısı A ve B açılarının toplamına eşittir. Ohalde şu neticeler de derhal söylenebilir:

II. — Bir üçgende bir dış açı, kendisine komşu olmayan iç açıların her birinden büyüktür.

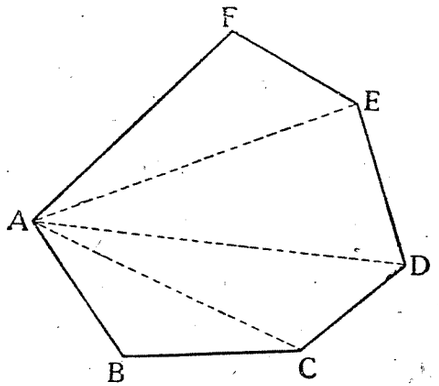
III. — Bir dik üçgenin dar açıları birbirinin tümleridir.

IV. — İki üçgenin ikişer açıları eşitse, üçüncü açıları da eşittir.

ÇOKGENİN İÇ VE DIŞ AÇILARI

48. *Teorem. — Bir içbükey çokgenin iç açılarının toplamı, kenarları sayısının iki eksiği kere iki dik açıya eşittir.*

ABCDEF içbükey çokgenini alalım (Şek. 52). Kenarları sayısını n ile gösterelim. Bu çokgenin A köşesinden geçen köşegenlerini çizelim; çokgen, köşegenleri tarafından $(n-2)$ üçgene ayrılmış olur. Her



Şek. 52

üçgenin iç açıları toplamı 2^D açı olduğundan ve bu üçgenlerin iç açıları toplamı çokgenin iç açıları toplamını verdiğinden, bu toplam S ile gösterilirse:

$$S = 2^D \times (n-2) = n \cdot 2^D - 4^D \qquad (1)$$

elde edilir.

49. *Uygulama. — Bir dörtgenin, bir beşgenin, bir ongenin iç açıları toplamını bulunuz.*

Dörtgenin iç açıları toplamı S_4, beşgenin S_5, ongenin S_{10} ile gösterilerek No. 48 (1) formülünden,

$$n = 4 \text{ için } S_4 = 2^D \times 2 = 4^D$$

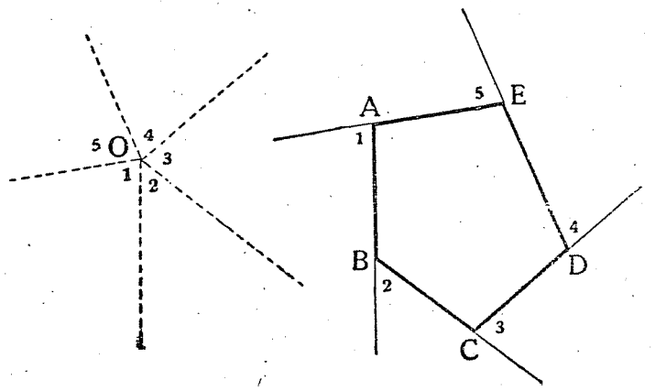
$$n = 5 \text{ » } S_5 = 2^D \times 3 = 6^D$$

$$n = 10 \text{ » } S_{10} = 2^D \times 8 = 16^D$$

bulunur.

50. *Teorem. — Bütün içbükey çokgenlerin dış açıları toplamı dört dik açıdır.*

Bir içbükey çokgenin bir köşesindeki iç ve dış açıları toplamı 2^D dır. Ohalde bir n kenarlı çokgenin iç ve dış açıları toplamı $n \cdot 2^D$



Şek. 53

olacaktır. Bundan iç açıları toplamı çıkarılacak olursa, geriye çokgenin dış açıları toplamı kalacağından, bu toplam S′ ile gösterilirse:

$$S' = n \cdot 2^D - (n \cdot 2^D - 4^D) = 4^D$$

bulunur.

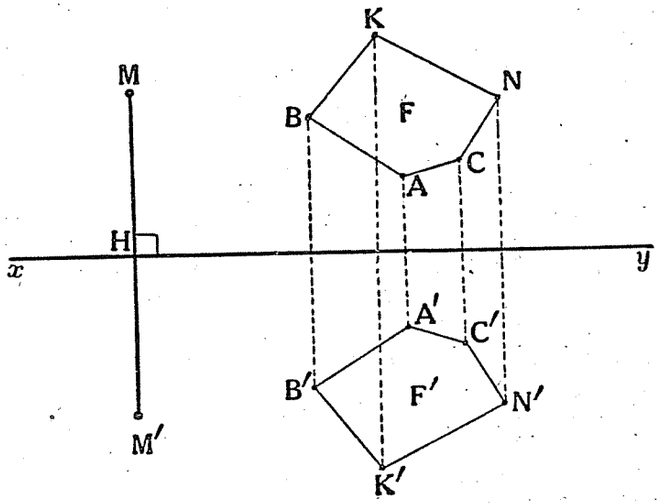
Diğer taraftan bu teoremin ikinci bir ispatını da kolayca verebiliriz: Bir O noktasından çokgenin kenarlarına paraleller çizersek çokgenin dış açılarının eşitlerini O noktası etrafında toplamış oluruz (Şek. 53). Bir nokta etrafındaki açıların toplamı 4^D olduğundan, çokgenin dış açıları toplamı da 4^D olur.

BÖLÜM III

SİMETRİ

BİR DOĞRUYA GÖRE SİMETRİ

51. *Tanımlar.* — MM′ doğru parçası ile xy doğrusunu alalım (Şek. 54). Eğer xy doğrusu MM′ doğru parçasının orta dikmesi ise M, M′ noktaları xy doğrusuna göre *simetriktir* denir.



Şek. 54

M noktasının xy doğrusuna göre M′ simetriğini çizmek için, M noktasından xy ye bir MH dikmesi indirilir, bu dikme MH = HM′ kadar uzatılırsa elde edilen M′ noktası M nin xy doğrusuna göre simetriğidir.

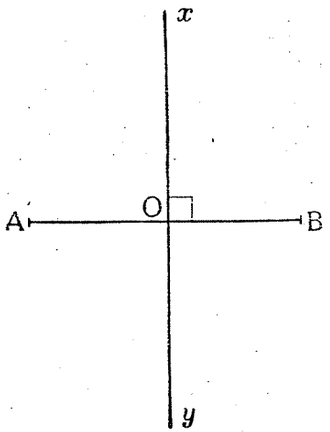
Gerçekten, M noktasının bulunduğu yarım düzlem, xy etrafında döndürülecek olursa, MH, M′H doğrultusunu alır. MH = M′H alındığından M noktası M′ noktasına gelir.

Bir F şeklinin bütün noktalarının xy doğrusuna göre simetriği çizilirse, simetrik noktaların meydana getirdiği F′ şekli, F şeklinin xy doğrusuna göre simetriğidir (Şek. 54).

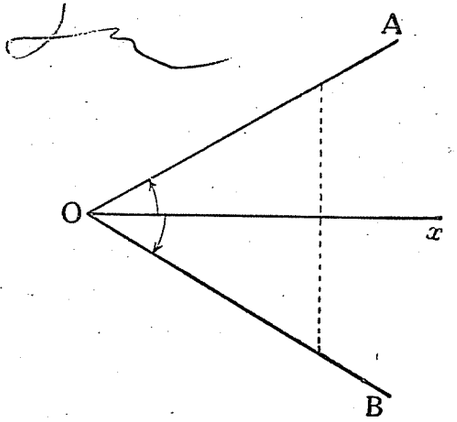
İki şekil üst üste konulduğu zaman bütün noktaları çakışıyorsa bu iki şekle *birbirine eşittir* denir.

52. *Teorem. — Bir doğruya göre simetrik olan iki şekil birbirine eşittir.*

Herhangibir F şeklinin xy doğrusuna göre simetriği F′ şekli olsun. F şeklinin bulunduğu yarım düzlem xy doğrusu etrafında döndürülecek olursa F şeklinin bütün noktaları F′ şeklinin üzerindeki simetrik noktalarla çakışacağı için bu iki şekil de çakışır, dolayısiyle F ve F′ şekilleri eşittir.



Şek. 55



Şek. 56

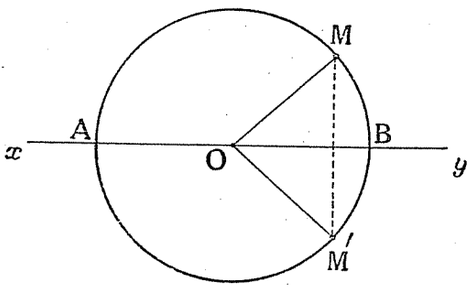
53. *Bir şeklin simetri ekseni.* — Bir doğru bir şekli bu doğruya göre simetrik iki parçaya ayırırsa, bu doğruya şeklin *simetri ekseni* denir.

Örnekler :

1° Bir doğru parçasının orta dikmesi bu doğru parçasının simetri eksenidir (Şek. 55).

2° Bir açının açıortayı bu açının simetri eksenidir (Şek. 56).

3° Bir dayirenin çapları bu dayirenin bir simetri eksenidir (Şek. 57). Gerçekten

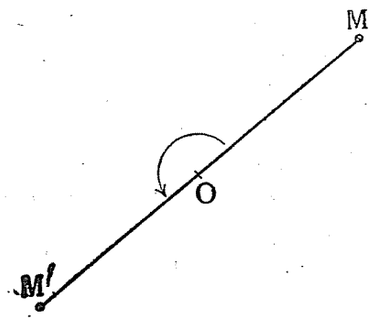


Şek. 57

AMB yarım dayiresini AB çapı etrafında döndürecek olursak AM'B yarım dayiresinin üzerine çakışacaktır.

NOKTAYA GÖRE SİMETRİ

54. *Tanım.* — Bir O noktası MM' doğru parçasının orta noktası ise, M ve M' noktalarına O noktasına göre birbirinin *simetriği* ve O noktasına da *simetri merkezi* denir (Şek. 58).



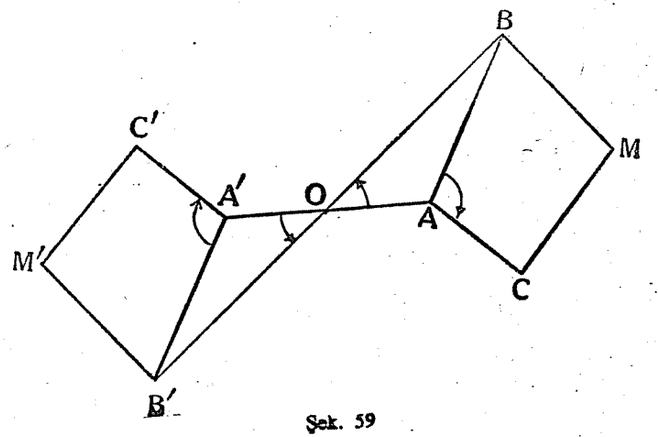
Şek. 58

Herhangibir M noktasının, bir O noktasına göre simetriğini çizmek için, M ile O birleştirilip uzatılır ve uzantı üzerinde MO = OM' alınırsa, M noktasının O noktasına göre simetriği elde edilmiş olur.

Bir F şeklinin bütün noktalarının aynı O merkezine göre simetriği çizilirse, elde edilen F' şekline, F şeklinin O merkezine göre *simetriği* denir.

55. *Teorem. — İki şekil bir O noktasına göre birbirinin simetriği ise, bu iki şekil birbirine eşittir.*

Bir F şeklinin A ve B noktalarının O noktasına göre simetrikleri F' şeklinin A', B' noktaları olsun (Şek. 59). A noktası A' üzerine gelinceye kadar O noktası etrafında çevrilecek olursa, ok ile gösterilen açıların eşitliğinden dolayı OB, OB' doğrultusunu alacaktır. Simetri



Şek. 59

dolayısiyle OB = OB' olduğundan B ve B' noktaları çakışacaktır. Bunun gibi F şeklinin herhangibir M noktası bu çevirmede F' şekli üzerinde M' simetriğine çakışacağından, bu iki şekil birbirine eşittir.

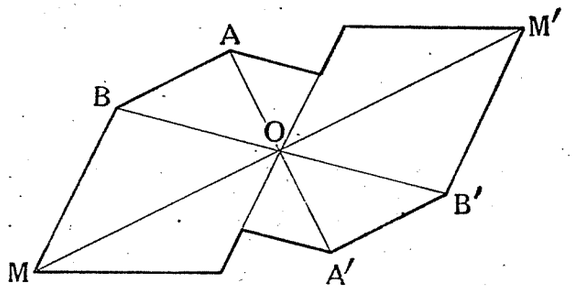
Örnekler :

1° Bir AB doğru parçasının simetriği bir A'B' doğru parçasıdır (Şek. 59).

2° Bir BAC açısının simetriği B'A'C' açısıdır (Şek. 59).

3° Bir dayirenin simetriği kendisine eşit bir dayiredir.

56. *Bir şeklin simetri merkezi.* — Bir şeklin verilen O noktasına göre simetrik noktaları, şekil O noktası etrafında 180° döndürüldüğü zaman çakışırsa, O noktasına *şeklin simetri merkezi* denir (Şek. 60).



Şek. 60

Örnekler :

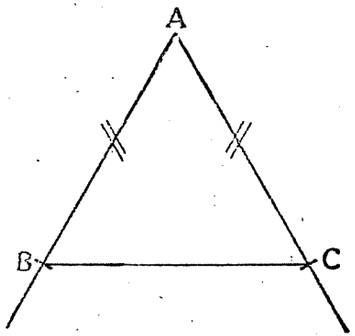
1° Bir doğru parçasının orta noktası bu doğru parçasının simetri merkezidir.

2° Bir dayirenin merkezi bu dayirenin simetri merkezidir.

İKİZKENAR ÜÇGEN

57. *Tanım.* — İki kenarı birbirine eşit olan üçgenlere *ikizkenar üçgen* denir.

Bir A açısının kenarları üzerinde AB = AC doğru parçaları alınıp B ile C birleştirilirse elde edilen ABC üçgeni bir ikizkenar üçgendir (Şek. 61).

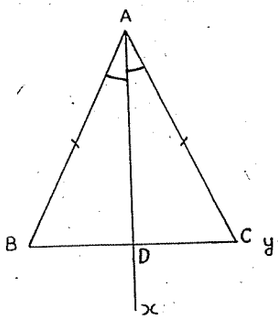


Şek. 61

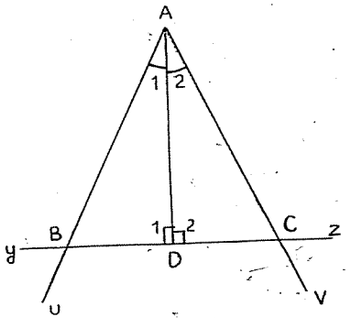
58. *Teorem. — Bir ikizkenar üçgende eşit kenarlar karşısındaki açılar birbirine eşittir.*

ABC ikizkenar üçgeninde AB = AC olsun (Şek. 62 *a*). A açısının Ax açıortayını çizelim. ADC üçgenini Ax etrafında katlarsak AC kenarı AB doğrultusuna gelir, AB = AC olduğundan, C noktası B noktasına çakışır. D noktası değişmediğinden C ve B açılarının köşe ve kenarları da çakışır. Ohalde bu iki açı birbirine eşittir.

59. *Karşıt teorem. — Bir üçgenin iki açısı eşitse, bu üçgen bir ikizkenar üçgendir.*



Şek. 62 a



Şek. 62 b

BC ye AD dikmesini çizelim, $\measuredangle B = \measuredangle C$, $\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2 = 90°$ olduğundan $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ olur (No. 47, IV). Şekli AD etrafında katlıyacak olursak, Dy yarım doğrusu Dz üzerine ve Au yarım doğrusu da Av üzerine çakışır. Bunların kesim noktaları olan B ile C de üst üste gelir. Şuhalde, AB = BC dir (Şek. 62 b).

60. *Tanımlar.* — Bir ikizkenar üçgende ikiz olmayan kenara *taban*, tabanın iki tarafındaki açılara *taban açıları*, taban karşısındaki açıya da *tepe açısı* denir.

Yukarıdaki teorem ve karşıtından aşağıdaki neticeler derhal söylenebilir :

61. *Sonuçlar. I. — Bir ikizkenar üçgenin tepe açısının açıortayı bir simetri eksenidir.*

II. — Bir ikizkenar üçgenin tepe açısının açıortayı aynı zamanda kenarortay ve yüksekliğidir.

Katlama esnasında DC = DB olduğundan AD, kenarortay ve

$$\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = 1^D$$

olmasından dolayı da AD yüksekliktir.

III. — Bir ikizkenar üçgenin tabanının orta dikmesi üçgenin tepesinden geçer.

EŞKENAR ÜÇGEN

62. Bir eşkenar üçgene bir ikizkenar üçgen gözü ile bakarak aşağıdaki özellikleri hemen söyleyebiliriz :

1° Bir eşkenar üçgenin bütün açıları eşittir.

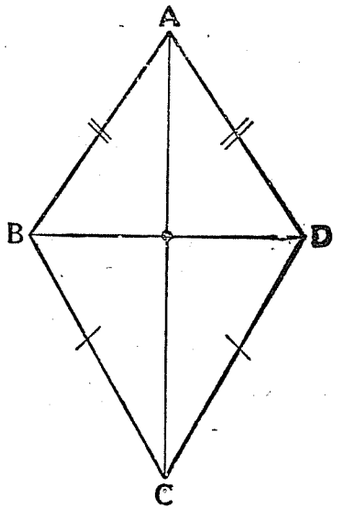
2° Bir eşkenar üçgenin üç açıortayı aynı zamanda kenarortay ve yüksekliklerdir.

3° Bir eşkenar üçgenin üç kenar orta dikmesi karşı köşeden geçer.

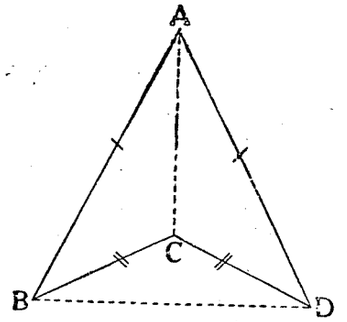
DELTOİT

63. *Tanım.* — Bir dörtgenin iki komşu kenarı birbirine eşit, diğer iki kenarı da birbirine eşitse bu dörtgene *deltoit* denir.

ABCD deltoidinde AB = AD, CB = CD farzedelim. A ve C noktaları BD nin orta dikmesi üzerinde bulunur (No. 61, Netice III).



Şek. 63



Şek. 64

Ohalde AC doğrusu, şeklin simetri eksenidir. BD nin orta dikmesidir ve A, C açılarının açıortayıdır.

Şek. 63, bir içbükey deltoit, Şek. 64 de bir dışbükey deltoittir.

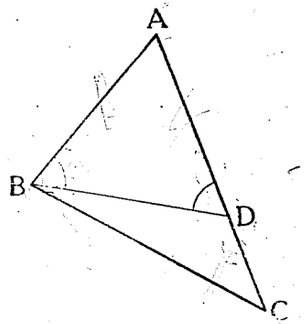
Temel çizimler. — Deltoit özelliğinden faydalanarak :

1° Bir doğru parçasını iki eşit parçaya bölünüz.
2° Bir açının açıortayını çiziniz.
3° Bir doğruya, üzerindeki bir noktadan dikme çıkınız.
4° Bir doğruya, dışındaki bir noktadan dikme çiziniz.

BİR ÜÇGENİN KENARLARI VE KARŞISINDAKİ AÇILAR

64. *Teorem.* — *Bir üçgende büyük kenar karşısında büyük açı bulunur.*

Bir ABC üçgeninde $AC > AB$ olsun (Şek. 65). Üçgenin AC kenarı üzerinde $AD = AB$ alalım. ABD üçgeni ikizkenar üçgen olup, ABD ve ADB açıları eşittir. D noktası A ile C arasında olduğu için, BD doğrusu ABC açısının içindedir; ohalde ABC açısı ABD açısından büyüktür. $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ olduğundan ABC açısı ADB açısından da büyüktür. ADB açısı BDC üçgeninin bir dış açısı olduğundan kendine komşu olmayan iç açıların her birinden büyüktür. Ohalde



Şek. 65

$$\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$$

dir. Halbuki yukarıda $\widehat{ABC} > \widehat{ADB}$ olduğunu söylemiştik. Şuhalde

$$\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$$

elde edilir.

65. *Karşıt teorem.* — *Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar bulunur.*

Farzedelim ki ABC üçgeninde $\widehat{B} > \widehat{C}$ olsun. Bu takdirde $AC > AB$ dir. Çünkü, eğer AC, AB den büyük olmasa, ya AC, AB den küçüktür veya $AC = AB$ dir.

$AC < AB$ olamaz. Çünkü, bu takdirde esas teoreme göre $\widehat{B} < \widehat{C}$ olması icap eder ki, hipoteze aykırıdır.

$AC = AB$ de olamaz. Çünkü, bu halde $\widehat{B} = \widehat{C}$ olması icap eder ki, bu da hipoteze aykırıdır. Ohalde

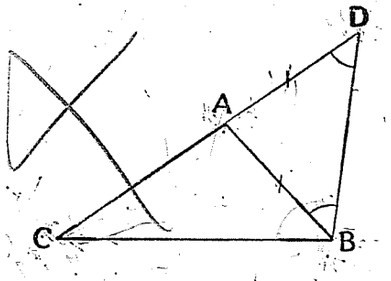
$$AC > AB$$

dir.

İhtar. — Matematikte bu çeşit ispata, yâni tersinin olamayacağını göstermeye *olmayana ergi yolu ile ispat* denir.

66. *Teorem.* — *Bir üçgende bir kenar diğer iki kenarın toplamından küçük, farkından büyüktür.*

1° Bir ABC üçgeninin en büyük kenarı BC olsun (Şek. 66). Üçgenin AC kenarını $AD = AB$ kadar uzatalım. ABD üçgeni ikizkenar üçgendir. Ohalde $\widehat{BDC} = \widehat{ABD}$ olup, bu açılar DBC açısından küçüktür. DBC üçgeninde büyük açı karşısında büyük kenar bulunacağından



Şek. 66

$$BC < DC$$

veya

$$BC < AC + AD$$

veyahut

$$BC < AC + AB \qquad (1)$$

bulunur. Aynı suretle

$$AC < BC + AB \qquad (2)$$

$$AB < AC + BC \qquad (3)$$

olduğu görülebilir.

2° Farzedelim ki, $BC > AC > AB$ olsun. (1) eşitsizliğinin iki tarafından AC veya AB çıkarılarak

$$BC - AC < AB$$

veya

$$BC - AB < AC$$

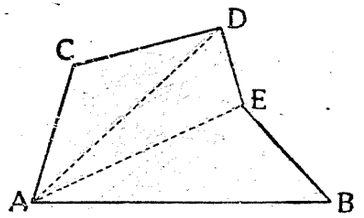
bulunur. (2) eşitsizliğinin iki tarafından AB çıkarılarak

$$AC - AB < BC$$

elde edilir.

67. *Teorem.* — *Uçları aynı olan bir doğru parçası herhangibir kırık çizgiden küçüktür.*

Uçları aynı olan AB doğru parçası ile ACDEB kırık çizgisini alalım (Şek. 67). A ile D ve A ile E yi birleştirelim. No. 66. 1° den dolayı



Şek. 67

$$AB < AE + EB$$
$$AE < AD + DE$$
$$AD < AC + CD$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bunları taraf tarafa toplayıp eşit terimler iki taraftan kaldırılarak

$$AB < AC + CD + DE + EB$$

bulunur.

DİKME VE EĞİKLER

68. *Tanım.* — Bir doğrunun dışında alınan bir noktadan bu doğruya çizilen dikmenin doğruyu kestiği noktaya *dikme ayağı* denir.

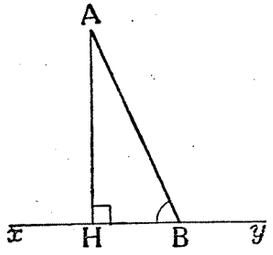
69. *Teorem.* — *Bir doğrunun dışında alınan bir noktadan bu doğruya bir dikme ile birtakım eğikler çizilse :*

1° Dikme, eğiklerin hepsinden kısadır.

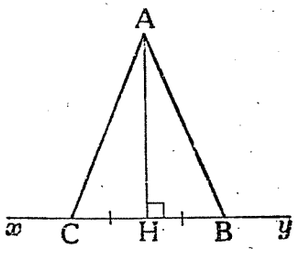
2° Dikme ayağından eşit uzaklıktaki eğikler, birbirine eşittir.

3° Dikme ayağından en uzakta bulunan eğik, en uzundur.

1° Bir xy doğrusunun dışında alınan bir A noktasından bu doğruya bir AH dikmesi ve bir de AB eğiği çizilmiş olsun (Şek. 68).



Şek. 68



Şek. 69

AHB dik üçgeninde AH dik kenarı AB hipotenüsünden kısadır (No. 65).

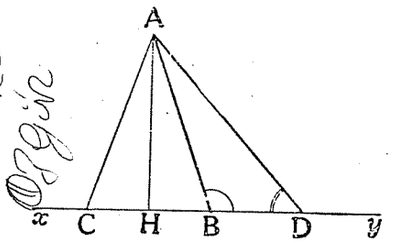
2° AB ve AC eğiklerinin B ve C noktalarının dikme ayağına uzaklıkları eşit olduğundan

$$HB = HC$$

dir (Şek. 69). AH, ABC üçgeninin kenarortayı ve yüksekliği olduğundan bu üçgen ikizkenar üçgendir. Ohalde

$$AB = AC$$

dir.



Şek. 70

3° AB ve AD eğikleri AH dikmesinin bir tarafında ve HB < HD olsun (Şek. 70). ABD açısı AHB dik üçgeninin bir dış açısı olduğundan geniş açıdır. ADB açısı ise bir dar açı olup

$$\widehat{ABD} > \widehat{ADB}$$

dir. Ohalde :

$$AD > AB$$

olur (No. 65).

70. *Karşıt teorem.* — *Bir doğrunun dışında alınan bir noktadan birtakım doğrular çizilse :*

1° Bu doğrular arasında en kısası, doğruya diktir.

2° Eşit eğikler, dikme ayağından eşit uzaklıktadır.

3° En uzun eğik, dikme ayağından en uzakta bulunur.

1° Gerçekten bir an için AH nin dik olmadığı farzedilirse, xy doğrusuna AH′ dikmesi çizilir; esas teoreme göre AH′ < AH olması icabeder ki, bu, hipoteze aykırıdır. Ohalde AH, xy ye diktir.

2° AB = AC farzedelim, ABC üçgeni ikizkenar olup AH yüksekliği aynı zamanda kenarortay olacağından HB = HC dir.

3° AD > AB farzedelim. AH dikmesini çizerek HD > HB olduğunu ispatlayalım. Bir an için HB = HD veya HD < HB farzederek, HB = HD halinde AD = AB ve HD < HB halinde ise AD < AB olması icap eder. Her iki netice de hipoteze aykırı olduğundan HD > HB elde edilir.

BÖLÜM IV

EŞİTLİK KAVRAMI

ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ

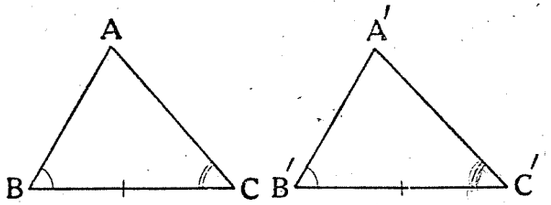
71. *Tanım.* — İki üçgen üst üste konulduğu zaman elemanları çakışırsa bu üçgenlere *eşit üçgenler* denir.

72. *1 inci hal. Teorem. — Birer kenarları ile bu kenarlara komşu açıları eşit olan üçgenler birbirine eşittir.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinde

$$BC = B'C', \qquad \widehat{B} = \widehat{B'}, \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

ise, bu iki üçgen eşittir (Şek. 71). A'B'C' üçgenini, ABC üçgeni üzerine yatıralım. $B'C' = BC$ olduğundan bu kenarlar üst üste gelir. $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ve $\widehat{C} = \widehat{C'}$ olduğundan B'A', BA ve C'A' de CA üzerine



Şek. 71

gelecektir. A' noktası hem B'A' ve hem de C'A' üzerinde olduğundan, hem BA ve hem de CA üzerine yani A noktasına gelir. Bu iki üçgen üst üste çakıştığından eşittir.

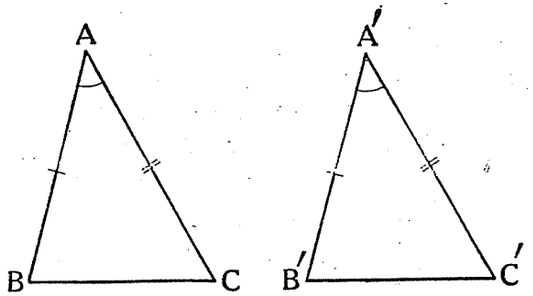
73. *2 nci hal. Teorem. — İkişer kenarı ile aralarındaki açıları eşit olan üçgenler eşittir.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinde

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C', \qquad \widehat{A} = \widehat{A'}$$

olsun (Şek. 72).

A'B' kenarı AB nin ve A' açısı da A açısının üzerine gelmek üzere A'B'C' üçgenini, ABC üçgeni üzerine yatıralım. $A'B' = AB$ ve



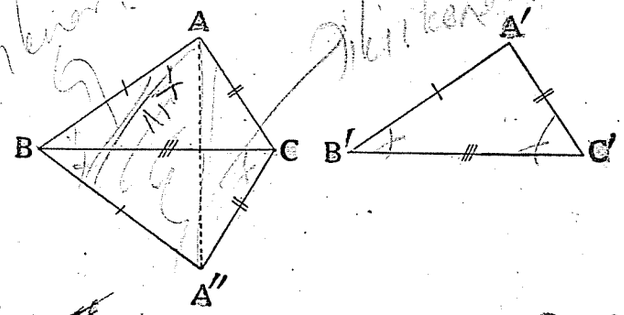
Şek. 72

$A'C' = AC$ olduğundan B' noktası B ye, C' noktası C ye gelecektir. Ohalde B'C' de BC üzerine gelerek bu iki üçgen çakışacağından birbirine eşit olur.

74. *3 üncü hal. Teorem. — Üçer kenarı eşit olan üçgenler eşittir.* ABC ve A'B'C' üçgenlerinde

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C', \qquad BC = B'C'$$

olsun (Şek. 73). A'B'C' üçgenini, B'C' kenarı, ABC üçgeninin BC kena-



Şek. 73

rının ve A′ köşesi A nın karşı tarafında bir A″ noktasına gelmek üzere yatıralım. Burada BA = BA″ ve CA = CA″ dür, A ve A″ noktalarını birleştirelim. ABA″ ve ACA″ üçgenleri birer ikizkenar üçgendir. Bu ikizkenar üçgenlerin orta dikmeleri B ve C noktalarından geçeceği için BC kenarı, bu ikizkenar üçgenin orta dikmesidir. Bu orta dikme aynı zamanda açıortay olacağından $\widehat{ABC} = \widehat{A''BC}$ ve $\widehat{ACB} = \widehat{A''CB}$ dir. Diğer taraftan $\widehat{CBA''} = \widehat{B'}$ ve $\widehat{A''CB} = \widehat{C'}$ olduğundan bu iki üçgen eşittir.

75. *4 üncü hal. Teorem. — İkişer kenarı ile bunlardan büyük olanının karşısındaki açıları eşit olan üçgenler eşittir.*

ABC ve A′B′C′ üçgenlerinde

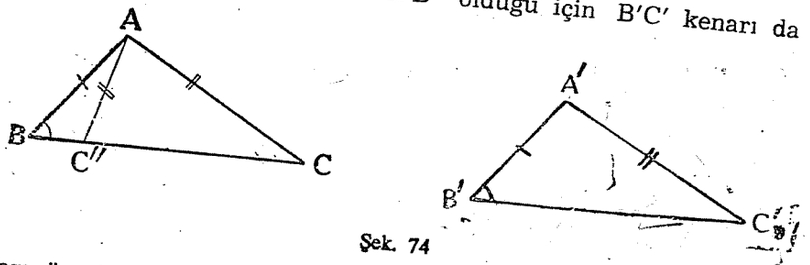
$$AB = A'B', \qquad AC = A'C', \qquad AC > AB$$

ve

$$\widehat{B} = \widehat{B'}$$

olsun (Şek. 74).

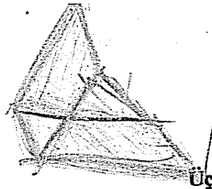
A′B′ kenarı AB ile üst üste gelmek üzere A′B′C′ üçgenini, ABC üçgeninin üzerine yatıralım. $\widehat{B} = \widehat{B'}$ olduğu için B′C′ kenarı da BC



Şek. 74

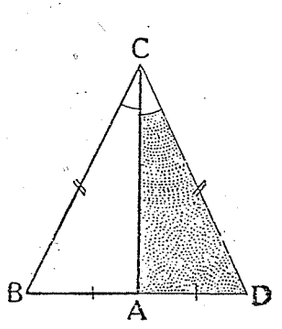
kenarı üzerine gelir. C′ noktasının C noktasına gelmediğini, meselâ C″ noktasına geldiğini farzedelim, AC″C üçgeni ikizkenar üçgen olup, taban açıları birer dar açıdır. Şuhalde BC″A açısı bir geniş açıdır. ABC″ üçgeninde başka geniş açı bulunamıyacağı için bu geniş açı karşısındaki AB kenarı, dar açı karşısındaki AC″ kenarından büyüktür. AC″ = AC olduğundan AB > AC olur, bu ise hipoteze aykırı olduğundan C″ noktası B ile C arasında değildir.

C′ noktasının BC uzantısında olduğu farzedilirse, aynı şekilde, C açısının geniş açı olduğu dolayısiyle AB > AC sonucuna varılır. Şuhalde C″ noktası C nin üzerine düşer. Bu takdirde iki üçgen çakışacağından üçgenler eşit olur.

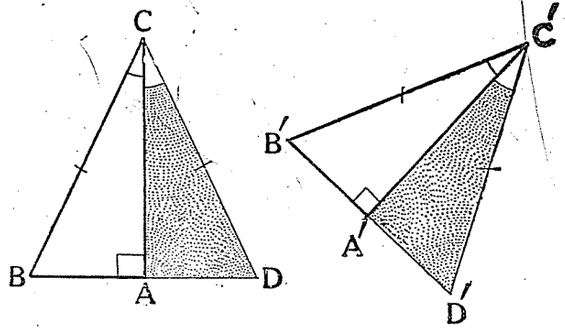


DİK ÜÇGENLERİN EŞİTLİĞİ

76. Bir ABC dik üçgeni alalım, BA dik kenarını kendisi kadar uzatalım (Şek. 75). BA = AD olduğundan CA, BCD üçgeninin hem yüksekliği ve hem de kenarortayıdır. Bu dik üçgene bir ikizkenar üçgenin yarısı gözü ile bakılabilir.



Şek. 75



Şek. 76

77. *1 inci hal. Teorem. — Hipotenüsleriyle birer dar açıları eşit olan dik üçgenler eşittir.*

ABC ve A′B′C′ dik üçgenlerinde

$$BC = B'C', \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

olsun (Şek. 76). Bu dik üçgenleri yukarıda olduğu gibi ikizkenar üçgenlere tamamlayalım. CBD ve C′B′D′ ikizkenar üçgenlerinde

$$BC = B'C' = CD = C'D' \qquad \text{ve} \qquad \widehat{BCD} = \widehat{B'C'D'}$$

dür. Şuhalde bu iki ikizkenar üçgen eşittir (No. 73). Bunların yarıları da eşit olacağından ABC ve A′B′C′ dik üçgenleri de eşit olur.

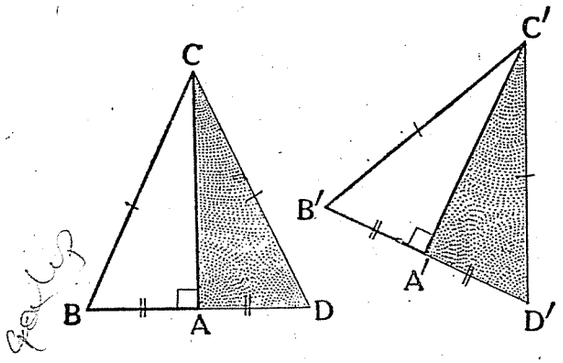
78. *2 nci hal. Teorem. — Hipotenüsleri ile birer dik kenarları eşit olan dik üçgenler eşittir.*

ABC ve A′B′C′ dik üçgenlerinde

$$BC = B'C', \qquad AB = A'B'$$

olsun (Şek. 77). Bu iki dik üçgeni ikizkenar üçgenlere tamamlayalım. BCD ve B′C′D′ ikizkenar üçgenlerinde BC = B′C′ = CD = C′D′ ve

BD = B'D' olduğundan bu iki ikizkenar üçgen eşittir (No. 74). Bunların yarıları da eşit olacağından ABC ve A'B'C' dik üçgenleri eşit olur.



Şek. 77

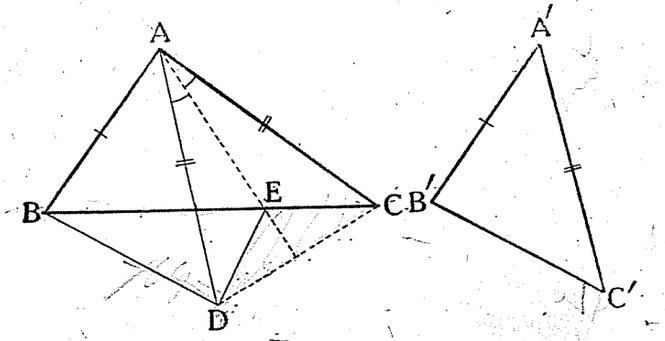
İKİ KENARI EŞİT ÜÇGENLER

79. *Teorem. — İki üçgenin iki kenarı birbirine eşit olsa ve aralarındaki açıları eşit olmasa, üçüncü kenarları eşit değildir; büyük açı karşısındaki kenar, küçük açı karşısındaki kenardan daha büyüktür.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinde

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C' \qquad \text{ve} \qquad \widehat{A} > \widehat{A'}$$

olsun (Şek. 78). A'B'C' üçgenini, A'B' kenarı eşiti olan AB üzerine gelecek şekilde yatıralım. $\widehat{A} > \widehat{A'}$ olduğundan A'C' kenarı, BAC açısı



Şek. 78

içinde AD konumunu alır. Burada AD = A'C' olduğundan, AD = AC ve BD = B'C' dür. CAD üçgeninin açıortayını çizelim. Bu açıortay, BC kenarını B ile C arasında bir E noktasında keser. AE açıortayı ADC ikizkenar üçgeninin DC kenarının orta dikmesidir. Ohalde DE = CE dir. BDE üçgeninde

$$BD < BE + ED$$

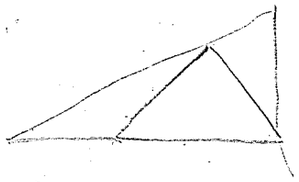
veya

$$B'C' < BE + EC$$

buradan da

$$B'C' < BC$$

bulunur.



80. *Karşıt teorem. — İki üçgenin ikişer kenarları eşit olsa üçüncü kenarları eşit olmasa, eşit olmayan kenarlar karşısındaki açılar da eşit değildir; büyük kenar karşısındaki açı küçük kenar karşısındaki açıdan büyüktür.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinde AB = A'B', AC = A'C' ve BC > B'C' olsun. $\widehat{A} < \widehat{A'}$ olamaz, çünkü bu takdirde BC < B'C' olmak gerekir ki hipoteze aykırıdır. $\widehat{A} = \widehat{A'}$ de olamaz, bu halde BC = B'C' olup, üçgenlerin eşit olması icap eder. Ohalde $\widehat{A} > \widehat{A'}$ dür.

ÜÇGENLERİN ÇİZİMLERİ

81. Bir üçgenin, en az biri kenar olmak üzere, üç elemanı bilinirse bu üçgen bellidir ve çizilebilir.

Üç açısı verilen bir üçgen belli değildir. Başka deyimle verilen şartı gerçekleyen sonsuz sayıda üçgen vardır.

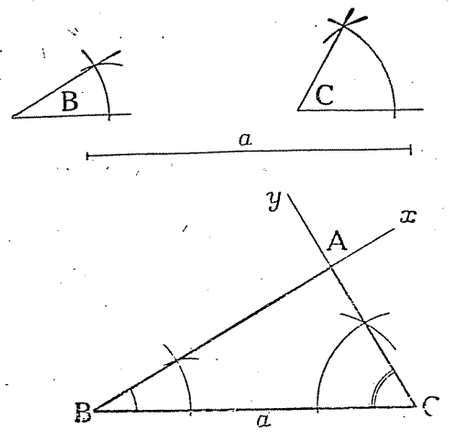
İki elemanın verilmesi halinde, üçüncü eleman keyfî alınabileceğinden yine sonsuz sayıda üçgen çizilebilir.

Belirli üçgenlerin çizimine dair aşağıdaki TEMEL ÇİZİMLER'i yapalım :

82. *Temel çizimler I. — Bir üçgenin bir kenarı ile bu kenara komşu iki açısı verildiğine göre üçgeni çizmek.*

Bir ABC üçgeninde BC = a ile B ve C açıları verilmiş olsun (Şek. 79).

$BC = a$ uzunluğunu alalım. B noktasından verilen B açısına eşit CBx açısını, C noktasından da verilen C açısına eşit BCy açısını (Bx ve Cy, BC nin aynı tarafında olmak üzere) çizelim. Eğer $B + C < 2^D$ ise, Bx ve Cy yarım doğruları bir A noktasında kesişirler. Bu suretle meydana gelen ABC üçgeni problemin cevabıdır. Bu şekilde çizilen bütün üçgenler, ABC üçgenine eşittir (No. 72).

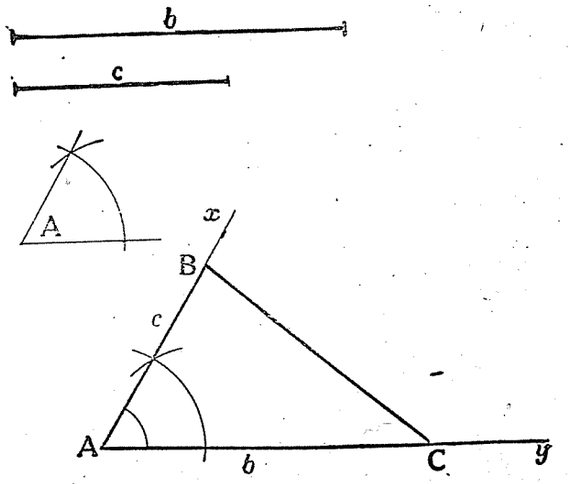


Şek. 79

II. — İki kenarı ile aralarındaki açısı verilen üçgeni çizmek.

Bir ABC üçgeninde $AB = c$, $AC = b$ kenarları ile A açısı verilmiş olsun (Şek. 80).

Verilen A açısına eşit xAy açısını çizelim. Ax üzerinde $AB = c$, Ay üzerinde $AC = b$ uzunluklarını alalım. B ile C arasını birleştirelim. ABC üçgeni aranan üçgendir. Bu şekilde çizilen bütün üçgenler, ABC üçgenine eşittir (No. 73).



Şek. 80

Bu üçgenin çizimi

$$A < 2^D$$

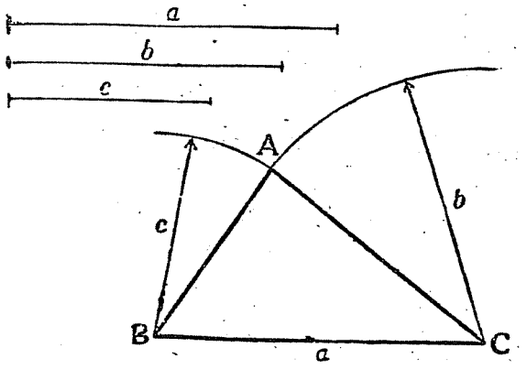
olmak şartiyle daima mümkündür.

III. — Üç kenarı verilen üçgenin çizimi.

Bir ABC üçgeninde

$$BC = a, \qquad AC = b, \qquad AB = c$$

verilmiş olsun (Şek. 81). Farzedelim ki $a > b > c$ dir. $BC = a$ uzunluğunu çizelim. Pergelin sivri ucunu C ye koyup b kadar açarak bir yay, sivri ucu B ye koyup c kadar açarak ikinci bir yay çizelim, bu iki yayın kesim noktaları üçgenin A köşesidir.



Şek. 81

Bu suretle elde ettiğimiz ABC üçgeni problemin cevabıdır ve bu şekilde çizilen bütün üçgenler, ABC üçgenine eşittir.

İrdeleme. — Çizimin mümkün olması için

$$b - c < a < b + c$$

olması gerekir ve yeter, $a > b > c$ farzedildiğinden daima a, $b - c$ den büyüktür. Ohalde şart olarak

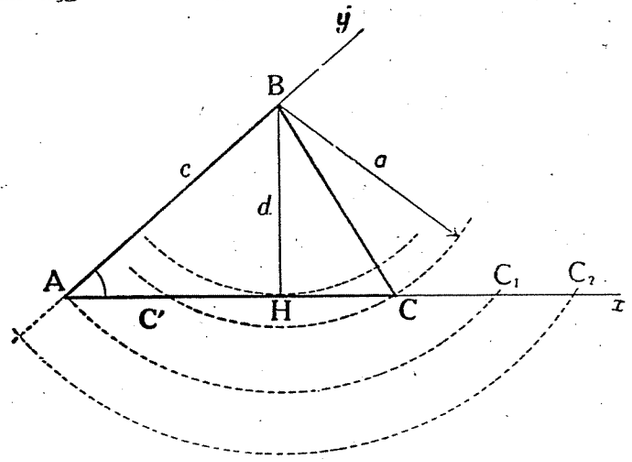
$$a < b + c$$

olmalıdır.

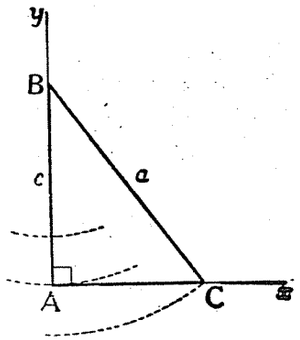
IV. — İki kenarı ile bu kenarlardan birinin karşısındaki açısı bilinen üçgeni çizmek.

ABC üçgeninin A açısı ile $BC = a$, $AB = c$ verilmiş olsun. A açı-

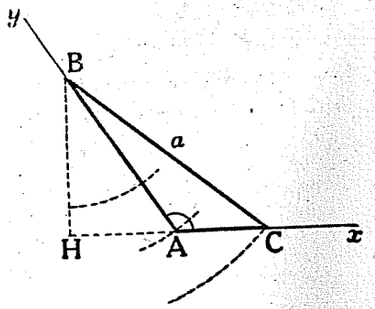
sına eşit xAy açısını çizelim (Şek. 82 - 83 - 84), Ay üzerinde $AB = c$ alalım. C noktası Ax üzerinde bulunmalıdır. Ohalde B merkez ve a yarıçap olmak üzere çizilen çemberin Ax i kestiği nokta C noktası olup aranan üçgen, ABC üçgenidir.



Şek. 82



Şek. 83



Şek. 84

İrdeleme. — B noktasının Ax yarım doğrusuna uzaklığı d ile gösterilirse :

1° A dar açı ise (Şek. 82),
$a < d$ ise 0 çözüm
$a = d$ » 1 » (AHB Dik üçgeni)

$d < a < c$ ise 2 çözüm (ABC ve ABC' üçgenleri)
$a = c$ » 1 » (ABC_1 üçgeni)
$a > c$ » 1 » (ABC_2 üçgeni).

2° A dik açı ise (Şek. 83),
$a \leqslant c$ ise 0 çözüm
$a > c$ » 1 » (ABC üçgeni).

3° A geniş açı ise (Şek. 84),
$a \leqslant c$ ise 0 çözüm
$a > c$ » 1 » (ABC üçgeni).

Görülüyor ki, eğer $a > c$ ise çizimin daima, A ne olursa olsun, bir çözümü vardır.

DİK ÜÇGENLERİN ÇİZİMLERİ

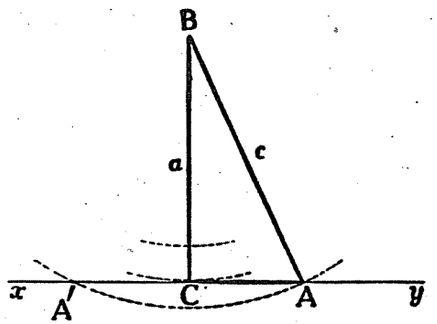
83. *c hipotenüsü ile bir a dik kenarı verilmiş olan dik üçgeni çizmek.* —

Bir xy doğrusunun bir C noktasından $CB = a$ dikmesi çıkılarak bulunan B noktası merkez, yarıçapı c olan bir çember çizilir (Şek. 85). Çemberle xy doğrusunun kesiştiği nokta üçgenin üçüncü köşesini verir.

İrdeleme. — Çizilen çemberin xy doğrusunu C noktasından başka bir noktada kesmesi için

$$c > a$$

olmalıdır. Bu bağıntıya göre BC ye nazaran simetrik, birbirine eşit ABC ve A'BC üçgenleri elde edilir ki, bu durumda çizimin bir tek çözümü vardır.

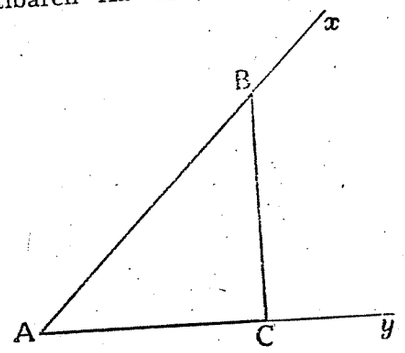


Şek. 85

84. *c hipotenüsü ile A dar açısı verilmiş olan dik üçgeni çizmek.* —

Verilen A dar açısına eşit olan xAy açısı çizilerek A köşesinden

itibaren Ax üzerinde verilen c hipotenüsüne eşit AB doğru parçası alınır (Şek. 86). B noktasından Ay ye çizilen BC dikmesinin Ay yi kestiği nokta aranan üçgenin üçüncü C köşesini verir. Çizimin daima bir tek çözümü vardır.



Şek. 86

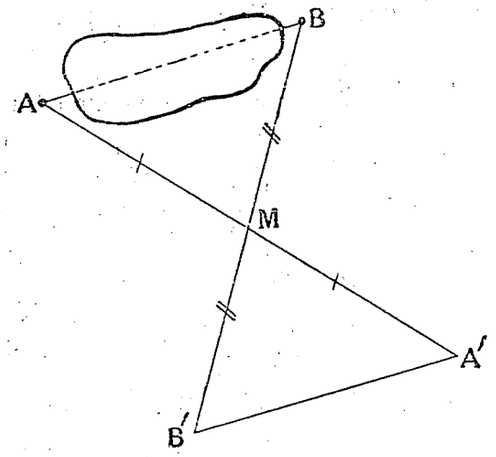
Üçgenlerin eşitliği yardımı ile arazi üzerinde uygulanacak problemler

85. Üçgenlerin eşitliğinden faydalanarak, arazi üzerinde doğrudan doğruya geçilemiyen iki nokta arasını ölçebiliriz (Bataklık, göl, ormanlık gibi).

Bir kaç örnek yapalım [*]:

86. *Problem. — Şek. 87 deki gölün kıyısında olan A ve B noktaları arasındaki uzaklığın ölçülmesi.*

A ve B noktalarına birer flâma ve her iki flâmayı da gören bir M noktasına diğer bir flâma dikilir. M noktası, A ve B noktalarına gidilebilecek bir durumda seçilir.



Şek. 87

$$MA = MA', \quad MB = MB'$$

olmak üzere MA ve MB uzunlukları ters yönde uzatılarak elde edilen A′, B′ yü birleştirelim. A′B′ uzaklığı AB ye eşittir. Çünkü, MAB ve MA′B′ üçgenlerinde

$$MA = MA', \quad BM = B'M$$

ve

$$\widehat{BMA} = \widehat{B'MA'}$$

olduğundan bu iki üçgen eşit olup dolayısiyle

$$AB = A'B'$$

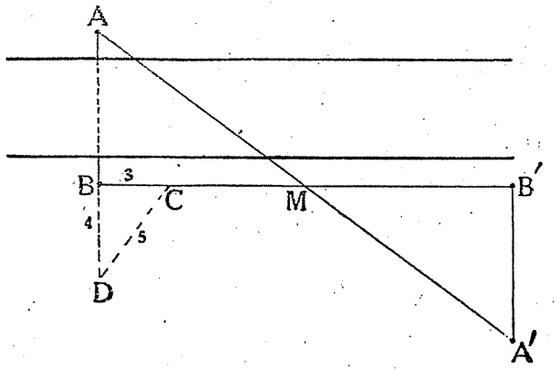
olur. A′ ve B′ noktaları, birinden diğerine gidilebilecek noktalar olduğundan bu uzaklık ölçülebilir.

[*] Trigonometri bilgisiyle bu tip ve başka problemlerin daha kolay ve çeşitli olarak çözülebileceği aşikârdır.

87. *Problem. — Bir nehrin genişliğinin ölçülmesi* [*].

Bu problemde gerilecek iplerin dik olmasını temin için kenarları 3 m, 4 m, 5 m olan bir ipten üçgenin, köşeleri gerildiği zaman 3 - 4 kenarlarının dik olduğu gösterilir.

Nehrin karşı kıyısında suya yakın bir A noktası ve bulunduğumuz kıyı tarafında AB ye dik BM uzaklığı seçilir (Şek. 88). Bu dik almada



Şek. 88

kenarları 3, 4, 5 metre olan BCD ip üçgeninden şekilde görüldüğü gibi istifade edilir. BM en az 50 m olmalıdır.

$BM = MB'$ alınarak seçilen B′ ve M noktalarına birer flâma dikilir, gene BCD ip üçgeninden faydalanarak MB′ ye B′ de dik olan bir ip gerilir; bu ip üzerinde ilerleyen bir gözleyici A, M noktalarını bir doğru üzerinde gördüğü anda bulunduğu A′ yerini işaretler. B′A′ uzaklığı pek az bir hata ile nehrin genişliğini verir. Çünkü, ABM ve A′B′M dik üçgenlerinde

$$BM = MB', \qquad \widehat{BMA} = \widehat{B'MA'}$$

olduğundan bu iki dik üçgen eşit olup, dolayısiyle

$$AB = A'B'$$

dür.

[*] Bu problem, tatbiki kolay olduğundan orduda istihkâm erlerine gösterilir.

İhtar. — A ve B noktaları suya ne kadar yakın alınırsa nehrin genişliğinin hesabında daha az hata yapılmış olur. Buna imkân yoksa ölçülebilen A'B' uzaklığından B ve A noktalarının suya olan kararlama uzaklıkları çıkarılmalıdır.

II. — III. — IV. ALIŞTIRMALAR

1. Bir ikizkenar üçgenin taban köşelerinden çizilen yükseklikler, kenarortaylar, açıortaylar eşittir.

2. İki yüksekliği eşit olan üçgen ikizkenardır.

3. Bir ABC üçgeninin C açısı B açısının 3 katıdır. BC nin orta dikmesi AB yi D noktasında kesmektedir:

1° CD nin ABC üçgenini ikizkenar iki üçgene ayırdığını ispatlayınız.

2° ABC üçgeninin A köşesindeki dış açısını B açısı cinsinden hesaplayınız.

4. A açısı dik olan ABC üçgeni ile AH yüksekliği gözönüne alınıyor:

1° BAH ile ACB ve CAH ile ABC açılarının eşit olduklarını ispatlayınız.

2° Bu açılarının açıortaylarının birbirine dik olduklarını gösteriniz.

5. ABC üçgeninin B açısının açıortayı, A dan geçen yüksekliği I noktasında, A noktasından AB ye çıkılan dikmeyi D noktasında kesiyor:

1° IAB, AID ve ADI açılarını B açısı cinsinden hesaplayınız.

2° AI ve AD uzunluklarının eşit olduklarını gösteriniz.

6. M, ABC üçgeninin içinde bir nokta olduğuna göre, BMC açısının BAC açısından büyük olduğunu gösteriniz.

7. Bir açısı 30° olan dik üçgende 30° nin karşısına gelen dik kenar hipotenüsünün yarısına eşittir.

8. Dik kenarlarından biri hipotenüsün yarısına eşit olan dik üçgende bu dik kenara karşı gelen açı 30° dir.

9. Komşu ve birbirinin bütünleri olan AOB ve BOC açılarının açıortayları Ox, Oy dir. OB üzerinde alınan bir D noktasından AC ye çizilen paralel Ox i M, Oy yi N noktasında kesiyor:

1° DOM ve NOD üçgenlerinin ikizkenar olduklarını ispatlayınız. D noktasının MN nin orta noktası olduğunu gösteriniz.

2° MON üçgeninin dik üçgen olduğunu; M, N açılarının birbirinin tümleri olduğunu gösteriniz.

10. A açısı dik olan ABC dik üçgeninde CB kenarı BD = BA kadar uzatılıyor. C den BC ye çizilen dikme üzerinde CE = CA alınıyor:

1° BAD, ACE, CAE açılarını B açısı cinsinden hesaplayınız.

2° D, A, E noktalarının aynı doğrultuda olduklarını gösteriniz.

11. 1° Bir ABC üçgeninin AA' yüksekliği ile AD açıortayı arasındaki açıyı B ve C açıları cinsinden hesaplayınız.

2° B ve C açılarının iç açıortaylarının teşkil ettiği BIC açısını A açısı cinsinden hesaplayınız.

3° B ve C açılarının dış açıortaylarının teşkil ettiği BJC açısını A açısı cinsinden hesaplayınız.

4° B ve C den indirilen yüksekliklerin teşkil ettiği BHC açısını A açısı cinsinden hesaplayınız.

12. Bir ABC üçgenini B ve C açılarının dış açıortaylarının kesim noktası J; A ve C nin dış açıortaylarının kesim noktası K; A ve B nin dış açıortaylarının kesim noktası da L ise:

1° JKL üçgeninin açılarını A, B, C açıları cinsinden hesaplayınız.

2° JBC, KAC, LAB üçgenlerinin açılarını JKL üçgeninin açılarına eşit olduklarını gösteriniz.

13. Bir xOy açısı ile bir P noktası veriliyor. O, tepe olmak üzere öyle bir OAB ikizkenar üçgeni çiziniz ki, A, Ox; B, Oy üzerinde olsun ve AB de P den geçsin.

14. İki üçgen eşitse, birinin kenarortayı, açıortayı, yükseklikleri diğerinin kenarortay, açıortay, yüksekliklerine eşittir. İspat ediniz.

15. Bir ABC eşkenar üçgeninin kenarları aynı yönde uzatılarak uzantılar üzerinde aynı uzunluklar alınıyor. Bu noktalar BC üzerinde A', CA üzerinde B', AB üzerinde C' olsunlar.

A'B'C' üçgeninin eşkenar üçgen olduğunu gösteriniz.

16. Bir ABC üçgeninin B açısı dar açı olup C açısının iki katıdır. Üçgenin AH yüksekliği çiziliyor. AB uzantısında BE = BH alınıyor. HE doğrusu AC yi D de kesiyor:

1° DA = DH = DC olduğunu gösteriniz.

2° ADE üçgeninin açılarının ABC üçgenini naçılarına eşit olduğunu gösteriniz.

3° B nin H ye göre simetriği B′ olsun. AB′C üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.

17. Bir ABC ikizkenar üçgeninin AC kenarının orta dikmesi, BC yi uzantısında bir D noktasında kesiyor. D ile A birleştiriliyor ve DA uzantısında AE = BD uzunluğu alınıyor:

1° DAC üçgeni ikizkenardır.

2° CDE üçgeni ikizkenardır. İspat ediniz.

18. Bir ABC üçgeninin AH yüksekliği uzantısında HD = HA ve MA kenarortay uzantısında ME = MA alınıyor:

1° CBD ve BCE açılarının ve BD, CE uzunluklarının eşit olduğunu gösteriniz.

2° BD ve CE, S noktasında kesiştiğine göre, SBC, SDE üçgenlerinin ikizkenar üçgen olduğunu ve SM nin bu üçgenlerin simetri ekseni olduğunu ispatlayınız.

BÖLÜM V

GEOMETRİK YER KAVRAMI

88. *Tanım.* — Her noktası verilen bir özelliği gerçekleyen ve bu özelliği gerçekleyen her noktayı taşıyan çizgiye (Yüzey veya cisme) bu özellikteki noktaların *geometrik yeri* denir.

Geometrik yer için verdiğimiz bu tanıma göre bir çizginin (Yüzey veya cismin) geometrik yer olduğunu göstermek için iki şeyin ispatı gerektir:

1. Geometrik yer olduğunu ispatlayacağımız çizgi üzerindeki herhangi nokta verilen özelliktedir.

2. Verilen özellikte olan bir nokta, çizgi üzerindedir.

Bir geometrik yer ispatında gösterilmesi zarurî olan bu iki kısımdan biri diğerinin karşıtı olan bir önermedir.

Bazan 1 ispanlandıktan sonra bunun karşıtı yerine tersi ispatlanır. Bu takdirde karşıtı da doğrudur.

1 in tersi şudur: Çizgi üzerinde olmayan bir nokta verilen özellikte değildir.

Şimdi geometrik yere ait örnekler verelim:

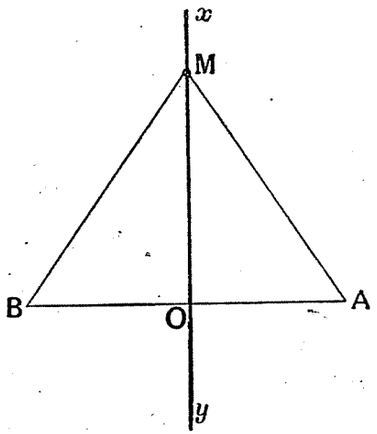
89. *I. — Sabit bir noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.*

II. — Bir doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu doğruya verilen uzaklıkta çizilen iki paralel doğrudur.

I. — Sabit bir A noktasından meselâ 4 cm uzaklıkta alınan noktaların özellikleri, verilen A noktasına eşit uzaklıkta olmalarıdır. Bu noktaların meydana getirdiği şekle *çember* denir.

II. — Bir D doğrusundan meselâ 3 cm uzaklıkta alınan noktaların özellikleri, verilen D doğrusuna eşit uzaklıkta olmalarıdır. Bu noktaların meydana getirdiği şekil, verilen doğruya paralel olan iki doğrudur. Bu iki paralel üzerinde olmayan bir nokta aynı özellikte değildir.

90. *Teorem.* — *Verilen iki noktaya uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikmesidir.*



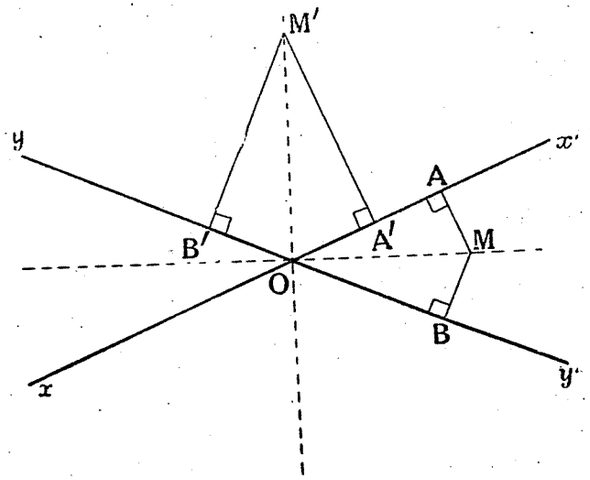
Şek. 89

1° A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olan bir nokta M olsun (Şek. 89). M ile A ve B noktalarını birleştirelim. MA = MB olduğu için MAB üçgeni ikizkenar bir üçgendir. Bu üçgenin taban orta dikmesi M noktasından geçer (No. 61, Netice III).

Ohalde M noktası, AB doğru parçasının orta dikmesi olan xy doğrusu üzerindedir.

2° AB doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan herhangibir M noktası, geometrik yere ait özelliği sağlar. Çünkü, MA, MB doğru parçaları xy ye göre simetrik olduklarından MA = MB dir.

91. *Teorem.* — *Kesişen iki doğruya olan uzaklıkları eşit olan noktaların geometrik yeri, bu doğruların açıortaylarıdır.*



Şek. 90

1° M noktası xx', yy' kesişen doğrularına eşit uzaklıkta olsun (Şek. 90).

MOA ve MOB dik üçgenlerinde MA = MB olup OM hipotenüsleri ortaktır. Ohalde bu iki üçgen eşit olur. Buradan

$$\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$$

bulunur. Şuhalde M noktası xOy açısının açıortayı üzerindedir.

2° M noktası xOy açısının açıortayı üzerinde olsun. $\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$ dir (hipotez), OM ortaktır. Ohalde MOA ve MOB dik üçgenleri eşit olup

$$MA = MB$$

dir.

GEOMETRİK YERLER YARDIMIYLA ÜÇGENLERİN ÇİZİMLERİ

92. Üçgenlerin çizimlerinde gördük ki: «Bir eleman kenar olmak üzere, üçgenin esas elemanlarından üçü bilinirse üçgen çizilir». Bu netice genişletilerek: «Bir üçgende en az biri uzunluk olmak üzere üç eleman verilirse genel olarak üçgen belirir» denebilir.

Bu suretle, açıortay, kenarortay, yükseklik gibi elemanlar açılarla beraber üçer üçer alınarak pek çok çizim problemleri elde edilebilir.

Burada şuna dikkat etmek lâzımdır ki: Bu problemlerin bazıları evvelce gördüğümüz gibi doğrudan doğruya çizilebilir; bazıları için ise yeni metodlar kullanmak icap eder, bazıları da imkânsızdır. (Yani cetvel ve pergel ile çizilemez).

Doğrudan doğruya çizim umumiyetle şöyle yapılır ki, biz burada bunlarla meşgul olacağız: Verilen bir eleman çizildikten sonra üçgenin çizilmesinin tamamlanması için bir noktanın belirtilmesine ihtiyaç kalır, bu nokta iki geometrik yerin arakesiti olarak elde edilir.

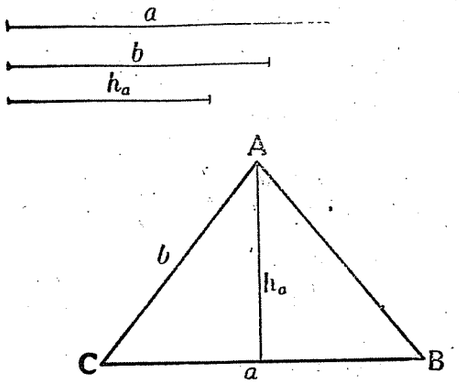
Bu arada esas üçgeni çizmeden evvel *yardımcı üçgenlerden* de faydalanılır.

Yardımcı üçgen metodu, aranılan üçgenin çizilmesinde kullanılabilecek diğer bir üçgenin daha evvel çizilmesiyle çizme metodudur.

Bir üçgenin çizimine başlamadan evvel verilen elemanlar, bir taslak üzerinde işaretlenir. Buna *örnek üçgen* diyeceğiz.

93. *Çizim.* — *a, b, h_a elemanlariyle verilen üçgeni çizmek.*

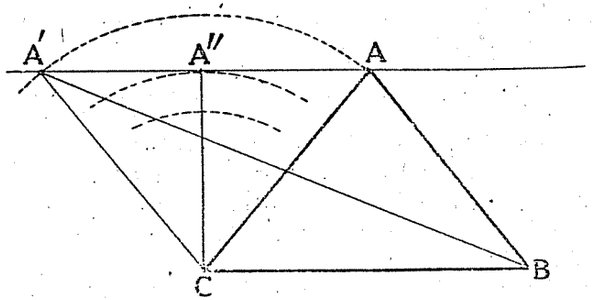
Örnek üçgen üzerinde verilen elemanları işaretleyelim (Şek. 91).



Şek. 91

BC = *a* kenarı çizilirse B ve C köşeleri elde edilmiş olup, A köşesini belirtmek işi kalır. A noktası, BC ye h_a uzaklığında olduğundan BC ye h_a uzaklığında çizilen paralel üzerinde bulunur. Diğer taraftan A noktası, C noktasından *b* kadar uzaklıkta olduğundan merkezi C, yarıçapı *b* olan çember üzerinde de bulunur. Şuhalde üçgenin A köşesi bu iki geometrik yerin arakesiti alınarak elde edilir (Şek. 92).

İrdeleme [*]. — Bulunan A noktası bir çember ile bir doğrunun arakesiti olarak elde edildiği için:



Şek. 92

1° $h_a < b$ ise 2 çözüm (ABC ve A'BC üçgenleri)
2° $h_a = b$ » 1 » (A''BC dik üçgeni)
3° $h_a > b$ » 0 »

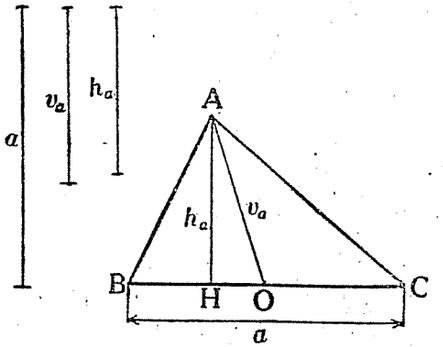
bulunur.

94. *Çizim.* — *a*, v_a, h_a *elemanlariyle verilen üçgeni çiziniz.*

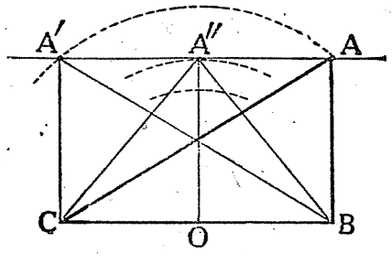
Çizim bir evvelki çizime benzemekte olup, A noktası BC nin

[*] Eşit şekiller bir çözüm karşılığı olarak sayılır.

O orta noktasından v_a uzaklığında olduğundan burada çizilen çemberin merkezi O, yarıçapı v_a dır (Şek. 93 ve 94).



Şek. 93



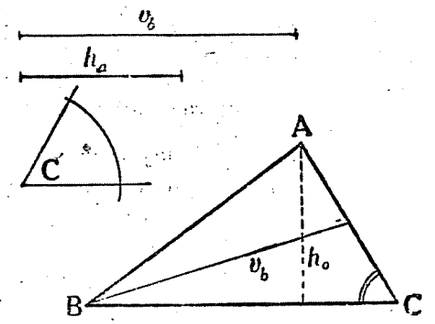
Şek. 94

İhtar. — AHO yardımcı dik üçgenini evvelâ çizmek ve OH uzantısı üzerinde ters yönlerde OB = OC = *a*/2 almakla da ABC üçgeni çizilebilir.

95. *Çizim.* — $\widehat{C}$, v_b, h_a *elemanlariyle verilen üçgeni çizmek.*

Örnek üçgende verilen elemanları işaretleyelim (Şek. 95).

Verilen C açısına eşit *xCy* açısı çizilir. A noktası, *Cy* ye h_a uzaklığında çizilen paralel üzerinde bulunur. Paralel ile *Cx* in kesim noktası A köşesidir. AC nin K orta noktası merkez, yarıçapı v_b olan çemberin *Cy* yi kestiği nokta B köşesidir.

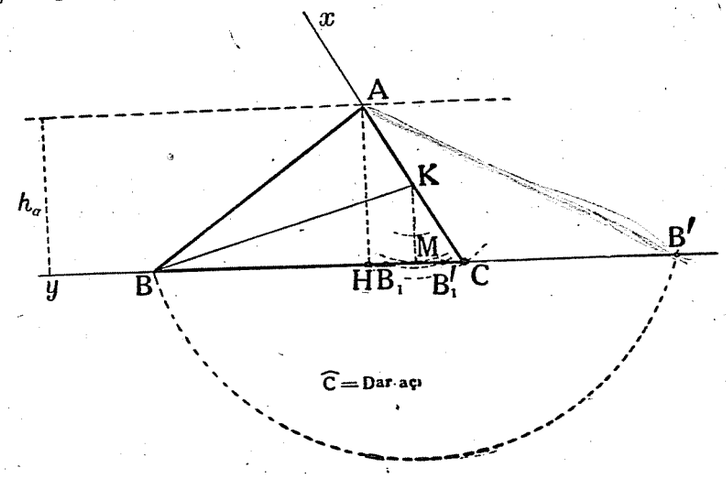


Şek. 95

İrdeleme. I. — C açısı dar açı olarak verilmiştir (Şek. 96). Evvelki irdelemeleri hatırlayarak:

Merkezi K, yarıçapı v_b olan çember *Cy* doğrusunu B ve B' noktalarında keserse de, AB'C üçgeni gereken şartları sağlamaz. Şuhalde v_b nin bu uzunluğu için 1 çözüm vardır. C ve h_a elemanlarını değiştirmeden v_b yi büyültürsek, B noktası sola doğru kayar ve B açısı küçülür. Bu değişmede A açısı büyür.

v_b küçülürse B sağa doğru kayar. B açısı da büyümeye başlar. $v_b = KH$ olunca $\widehat{B} = 1^D$ olur. Bu takdirde B′ noktası C ye gelir. Bundan sonra v_b, $v_b > h_a/2$ şartını gerçekleyerek küçülürse 2 çözüm vardır. $v_b = h_a/2$ için de 1 çözüm vardır. $v_b < h_a/2$ için 0 çözüm vardır.



Şek. 96

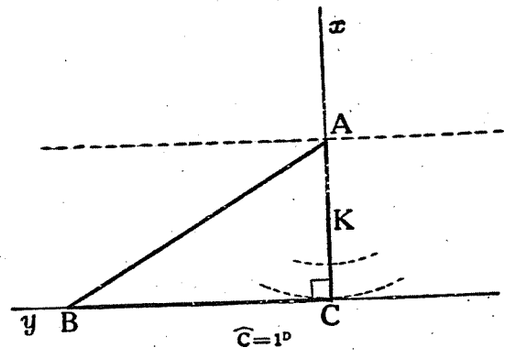
II. $\widehat{C} = 1^D$ olarak verilmiştir (Şek. 97).

$b = h_a$ olacağı kolayca görülür.

1° $v_b > h_a/2$ için 1 çözüm (ABC Dik üçgeni)

2° $v_b \leqslant h_a/2$ » 0 »

bulunur.



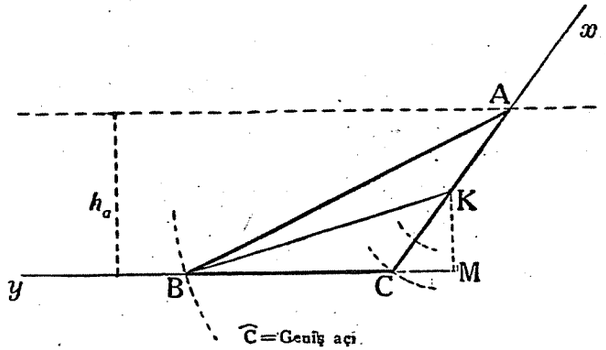
Şek. 97

III. C açısı geniş açı olarak verilmiştir (Şek. 98).

1° $v_b > h_a/2$ için 1 çözüm (ABC üçgeni)

2° $v_b \leqslant h_a/2$ » 0 »

vardır.

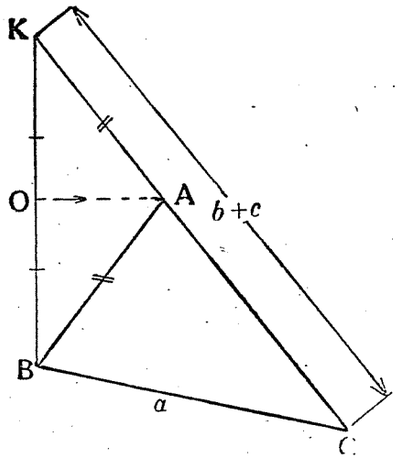


Şek. 98

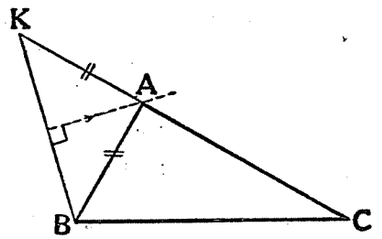
96. *Çizim. — a, b + c = s, $\widehat{C}$ elemanlariyle verilen üçgeni çizmek.*

Örnek üçgende verilen elemanları işaretleyelim (Şek. 99 - 100).

CA yı c kadar uzatalım. $CK = b + c = s$ elde edilir. KBC yardımcı üçgeni derhal çizilebilir (No. 82, II), KB nin orta dikmesinin CK yi kestiği nokta üçgenin A köşesi olur.



Şek. 99



Şek. 100

İhtar. — $b+c=s$ toplamını meydana çıkarmak için BA yı b kadar uzatabilirsek de, yardımcı üçgende C açısı bulunamıyacağından, BKC üçgenini çizemeyiz. Yardımcı üçgen teşkilinde bu nokta daima hatırlanmalıdır.

V. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki üçgenleri çiziniz:

1°	a, h_a, c	2°	A, h_a, B	3°	a, h_a, B	4°	c, h_b, C
5°	b, p, C	6°	a, k, B	7°	a, b, v_a	8°	b, h_a, v_a
9°	a, h_b, v_a	10°	n_A, B, C	11°	b+c, a, B	12°	b+c, a, A
13°	b+c, A, B	14°	b—c, a, A	15°	b+c, A, h_b	16°	b+c, a, h_c
17°	a, h_a, h_b	18°	a, b, h_b	19°	B, h_a, h_c	20°	a, c, h_a.

(k ve p, h_a nın a kenarı üzerinde ayırdığı parçalardır.)

2. Aşağıdaki dik üçgenleri çiziniz (A = 90°):

1° b, n_A 2° h, n_A 3° v_a, b 4° h, k 5° b, v_h 6° b, n_C.

3. Aşağıdaki ikizkenar üçgenleri çiziniz (AB = AC):

1° h_b, B 2° a, h_b 3° b, v_h 4° a, A 5° B, n_B. 6° c, h_c.

4. Bir ABC üçgeninin köşelerine eşit uzaklıkta olan bir nokta bulunuz.

5. Verilen üç doğruya eşit uzaklıkta olan bir nokta bulunuz.

6. Bir ABC üçgeninin BC tabanı üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, AB ve AC den eşit uzaklıkta olsun.

7. Bir ABC üçgeninde $v_a = b$ olduğuna göre, A köşesinin geometrik yerini bulunuz.

8. Yarıçapı bilinen öyle bir çember çiziniz ki, verilen A ve B noktalarından geçsin.

9. Bir M noktası ile bir D doğrusu veriliyor. M den a kadar ve D den b kadar uzaklıkta olan noktaları bulunuz.

10. Bir M noktası ile B ve C noktaları veriliyor. M den a kadar ve B ile C ye eşit uzaklıkta olan noktaları bulunuz.

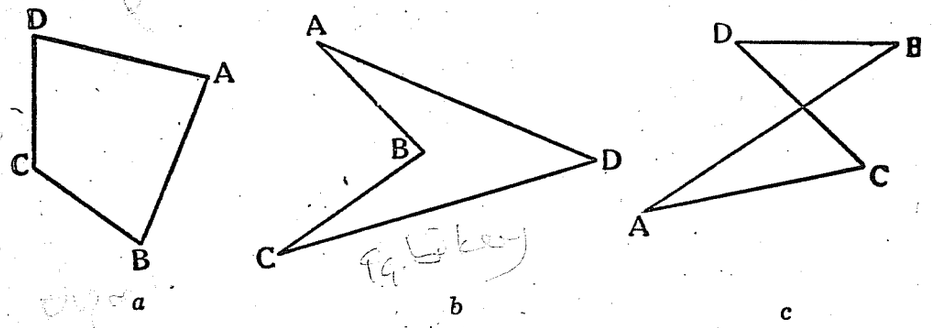
11. Kesişen iki doğruya aynı uzaklıkta ve verilen bir O noktasına da a kadar uzaklıkta olan noktaları bulunuz.

12. Kesişen iki doğruya aynı uzaklıkta ve verilen bir D doğrusuna da a kadar uzaklıkta olan noktaları bulunuz.

BÖLÜM VI

DÖRTGENLER

97. *Giriş.* — Üçgenler daima içbükey oldukları halde, dörtgenler *içbükey, dışbükey* ve *yıldızıl* olabilir (Şek. 101 *a, b, c*).



a *b* *c*

Şek. 101

Her üç halde de ikişer köşegen vardır. İçbükey ve dışbükey dörtgenin iç açıları toplamı 360° dir. Yıldızıl dörtgende iç açılar toplamı 0° ile 360° arasında her değeri alabilir. Bir ABCD dörtgeninde kenarları AB = *a*, BC = *b*, CD = *c*, DA = *d* ile; açıları A, B, C, D ile; köşegenleri de AC = *e*, BD = *f* ile göstereceğiz. AB ile CD ve BC ile AD kenarlarına *karşılıklı kenarlar;* A ile C ve B ile D ye *karşılıklı açılar* denir.

Kenar ve açıların özelliklerine göre dörtgenler şu adları alırlar:

1° Deltoit, 2° Paralelkenar, 3° Dikdörtgen, 4° Eşkenar dörtgen, 5° Kare, 6° Yamuk.

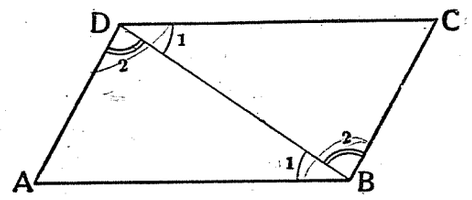
1° Deltoidin tanım ve özelliğinden daha evvel bahsetmiştik.

2° PARALELKENAR

98. *Tanım.* — Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene *paralelkenar* denir. Paralelkenarın tanımından hemen anlaşılacağı üzere bu dörtgen daima içbükeydir.

99. *Teorem. — Herhangibir paralelkenarda:*
1° Karşılıklı kenarlar eşittir.
2° Karşılıklı açılar eşittir.
3° Komşu açılar birbirinin bütünleridir.
4° Köşegenler birbirini ortalar.

1° Köşegenlerden herhangibirini meselâ BD yi çizelim (Şek. 102). ABD ve BDC üçgenlerinde BD ortaktır. B_1 ve D_1 açıları AB ve CD paralellerini BD kestiğine göre içters açılar olup eşittir. $\widehat{B_2}$ ve $\widehat{D_2}$ de AD, BC paralelleri BD tarafından kesilerek meydana gelen içters açılardır. Şuhalde bu iki üçgen eşittir. Eşit üçgenlerde eşit açılar karşısındaki kenarlar eşit olacağından $AB = DC$, $AD = BC$ dir.

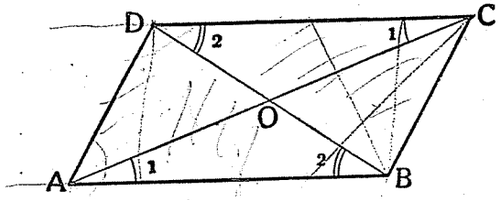


Şek. 102

2° ABD ve DBC üçgenlerinin eşitliğinden $\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$ dir.

3° Paralelkenarın karşılıklı kenarları paralel olmasından dolayı karşı durumlu açılar olan komşu açılar birbirlerinin bütünleridir.

4° ABCD paralelkenarının AC ve BD köşegenlerini çizelim (Şek. 103). Köşegenlerin kesim noktasını O ile gösterelim. AOB ve COD üçgenlerinde $AB = DC$ ve AB, DC paralel olduklarından $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$, $\widehat{B_2} = \widehat{D_2}$ dir. Şuhalde bu iki üçgen eşittir. Eşit açılar karşısındaki kenarlar eşit olacağından $OA = OC$, $OB = OD$ olup köşegenler birbirini ortalar.



Şek. 103

100. *Karşıt teoremler. —*
1° Karşılıklı kenarları eşit olan bir içbükey dörtgen paralelkenardır.
2° Karşılıklı açıları eşit olan bir konveks dörtgen paralelkenardır.
3° Komşu açıları birbirinin bütünleri olan dörtgen paralelkenardır.

4° Köşegenleri birbirini ortalayan dörtgen paralelkenardır.

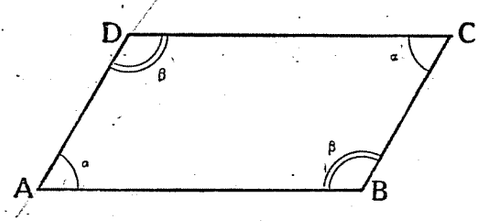
5° Karşılıklı iki kenarı paralel ve eşit olan içbükey dörtgen paralelkenardır.

1° ABCD içbükey dörtgeninde $AB = DC$, $AD = BC$ farzedelim (Şek. 102). ABD ve CDB üçgenlerinde DB ortaktır. Ohalde üçer kenarı eşit olan bu iki üçgen eşittir; eşit kenarlar karşısındaki açıların eşitliğinden $\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$ ve $\widehat{D_2} = \widehat{B_2}$ elde edilir. Bu açıların eşitliği, karşılıklı kenarların paralelliğini gösterir.

2° Karşılıklı açıları α ve β ile gösterelim (Şek. 104). Dört açının toplamı 4^D olduğundan

$$2\alpha + 2\beta = 4^D$$
$$\alpha + \beta = 2^D$$

dir.



Şek. 104

Şuhalde karşılıklı kenarlar paraleldir (No. 31, 3°).

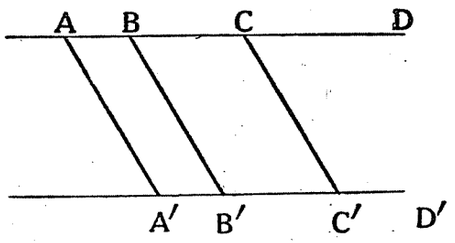
3° No. 31, 3° den dolayı karşılıklı kenarları paraleldir.

4° Şek. 103 deki OAB, OCD üçgenlerinde O noktasındaki açılar birbirinin tersi olup eşittir. Hipotezden dolayı $OA = OC$ ve $OB = OD$ dir. Şuhalde bu iki üçgen eşit olup, $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ dir. Bu sebepten AB ve CD paraleldir. OAD ve OCB üçgenlerinin eşitliğinden dolayı ve aynı sebeplerle AD, BC birbirine paraleldir. Karşılıklı kenarları paralel olan ABCD dörtgeni paralelkenardır.

5° ABCD dörtgeninde BD köşegenini çizelim (Şek. 102). $AB = DC$ ve AB nin CD ye paralel olduğu veriliyor. ABD ve CDB üçgenlerinde $AB = CD$ dir, BD ortaktır ve $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ dir. Bu iki üçgen eşittir. Bundan dolayı $\widehat{D_2} = B_2$ olup, AD, BC ye paraleldir.

101. *Teorem. — Paralel doğrular arasında kalan paralel doğru parçaları eşittir.*

D ve D′ paralel doğruları arasında kalan paralel doğru parçaları AA′, BB′, CC′ olsun (Şek. 105).

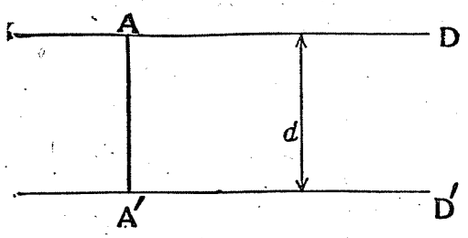


Şek. 105

ABB'A' ve ACC'A' dörtgenlerinin paralelkenar olmasından

$$AA' = BB' = CC'$$

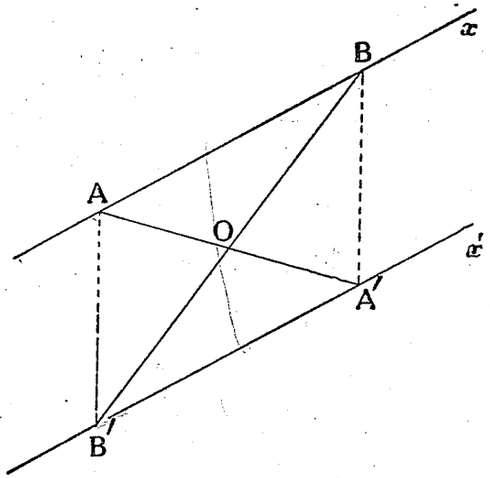
dür.



Şek. 106

102. *İki paralel doğru arasındaki uzaklık.*

Paralel iki doğrudan birisi üzerindeki bir A noktasından bu doğrulara çizilen herhangibir dikmenin paralel doğrular arasında kalan parçasına bu iki paralel doğru arasındaki *uzaklık* denir.



Şek. 107

Aynı doğruya dik olan doğrular paralel olduğundan bu dikmelerin uzunlukları eşittir (Şek. 106).

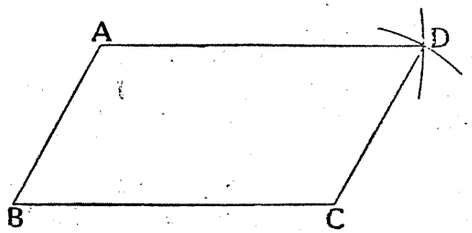
103. *Bir noktaya göre simetrik doğrular.*

AB ve A'B' doğru parçaları O noktasına göre simetrik olsun (Şek. 107).

ABA'B' dörtgeninin köşegenleri birbirini ortaladığı için, bu dörtgen bir paralelkenardır. Ohalde AB ve A'B' doğru parçaları birbirine paralel ve eşittir.

104. *Bir paralelkenarın dördüncü köşesini çizmek.*

A, B, C bir paralelkenarın üç ardışık köşesi olsun (Şek. 108). Paralelkenarın dördüncü D köşesi ABC açısının içindedir. Pergel, BC kadar açılıp, sivri ucu A ya konarak bir yay çizilir; pergel, BA kadar açılıp sivri ucu C ye konarak ikinci bir yay çizilir. Bu iki yayın kesim noktası olan D, dördüncü köşedir.



Şek. 108

3° DİKDÖRTGEN

105. *Tanım.* — Bir açısı dik olan paralelkenara *dikdörtgen* denir. Paralelkenarın karşılıklı açıları eşit, ardışık açıları birbirinin bütünleri olduğundan dikdörtgenin dört açısı da diktir.

Bir dikdörtgenin paralelkenarın özel hali olduğu söylendikten sonra, paralelkenar için ispatlanan bütün özellikler dikdörtgen için de doğru olur. Ohalde :

Bir dikdörtgenin karşılıklı kenarları eşittir; köşegenleri birbirini ortalar.

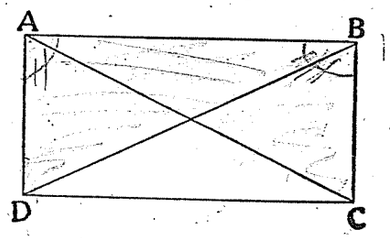
106. *Teorem. — Bir dikdörtgenin köşegenleri eşittir.*

ABCD dikdörtgeninin AC, BD köşegenlerini çizelim (Şek. 109).

ABC ve BAD üçgenlerinde

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 1^D,$$

AB kenarı ortak, $BC = AD$ olduğundan bu iki dik üçgen eşit olup $AC = BD$ dir.



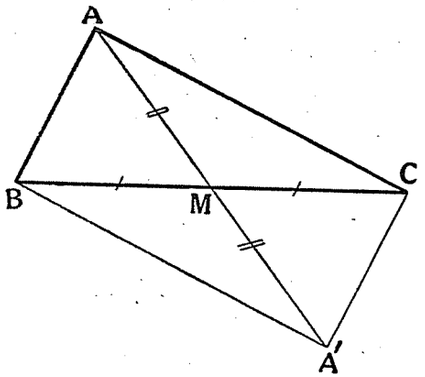
Şek. 109

107. *Karşıt teorem. — Bir paralelkenarın köşegenleri eşitse, bu paralelkenar bir dikdörtgendir.*

ABCD paralelkenarının BD ve AC köşegenleri eşit olsun (Şek. 109). ABC ve BAD üçgenlerinin AB kenarı ortak, $BC = AD$, $AC = BD$ dir (Hipotez). Bu iki üçgen eşit olup, ABC ve BAD açıları eşit ve aynı zamanda birbirinin bütünleri olduğundan, bu açılar dik açıdır. Öyleyse bu paralelkenar bir dikdörtgendir.

108. *Teorem. — Herhangi bir dik üçgenin hipotenüsüne ait kenarortayı, hipotenüsün yarısına eşittir.*

ABC dik üçgeninin hipotenüsüne ait kenarortayı MA olsun (Şek. 110) MA kenarortayını uzatarak $MA = MA'$ olmak üzere bir A' noktası alalım.



Şek. 110

ABA'C dörtgeninin köşegenleri birbirini ortaladığı ve bu dörtgenin A açısı dik olduğu için bu dörtgen bir dikdörtgendir. Dikdörtgenin köşegenleri eşit olduğundan $AA' = BC$ dir. Buradan

$$MA = \frac{AA'}{2} \qquad \text{veya} \qquad MA = \frac{BC}{2}$$

elde edilir.

109. *Karşıt teorem.* — *Bir üçgenin bir kenarortayı, ortaladığı kenarın yarısına eşitse, bu üçgen dik üçgendir.*

ABC üçgeninin MA kenarortayı BC nin yarısına eşitse, bu üçgen dik üçgendir. Gerçekten, MA yı kendisi kadar uzatalım. $AA' = BC$ dir. ABA'C paralelkenarının köşegenleri eşit olduğundan bu paralelkenar bir dikdörtgendir. Ohalde $\widehat{A} = 1^D$ dır.

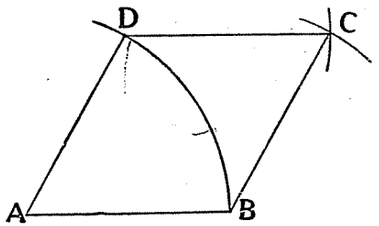
4° EŞKENAR DÖRTGEN

110. *Tanım.* — Komşu iki kenarı eşit olan paralelkenara *eşkenar dörtgen* denir.

Bu tanımdan dolayı: Bir eşkenar dörtgenin dört kenarı da birbirine eşittir.

Karşıt olarak: Dört kenarı eşit olan bir dörtgen eşkenar dörtgendir.

Gerçekten, bu dörtgenin karşılıklı kenarları eşit olduğundan paralelkenar, bu paralelkenarın dört kenarı eşit olduğundan bir eşkenar dörtgendir (Şek. 111).



Şek. 111

Bir eşkenar dörtgende paralelkenarın bütün özellikleri vardır.

111. *Teorem.* — *Bir eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirine diktir ve açılarının açıortayıdır.*

ABCD eşkenar dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktası O olsun (Şek. 112). DAB ikizkenar üçgeninde AO kenarortayı hem A açısının açıortayı ve hem de DB nin orta dikmesidir.

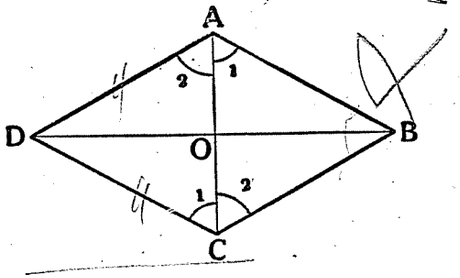
Ohalde AC ve BD birbirine diktir. Aynı suretle, BD nin B ve D açılarının açıortayı olduğu gösterilir.

112. *Karşıt teorem. I.* — *Bir paralelkenarın köşegenleri birbirine dikse bu paralelkenar bir eşkenar dörtgendir.*

ABCD paralelkenarının köşegenleri birbirine dik olduğundan, bunların biri diğerinin orta dikmesidir. Ohalde A noktası B ve D noktalarına eşit uzaklıktadır ve $AB = AD$ dir. Şuhalde ABCD bir eşkenar dörtgendir (Şek. 112).

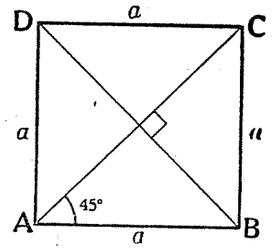
113. *Karşıt teorem II.* — *Bir paralelkenarın köşegenlerinden biri açılardan birinin açıortayı ise, bu paralelkenar bir eşkenar dörtgendir.*

ABCD paralelkenarının DAB açısının açıortayı AC olsun (Şek. 112). C_1 açısı ile A_1 açısı, içters açı olduklarından eşittir. Hipotezden $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, dolayısiyle de $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ dir. ADC üçgeni ikizkenar üçgen olup, $AD = DC$ dir. Ohalde paralelkenar bir eşkenar dörtgendir.



Şek. 112

114. *Eşkenar dörtgenin simetri eksenleri.* — ABCD eşkenar dörtgeninin köşegenlerinin herbiri diğerinin orta dikmesidir. Meselâ, BD köşegeni, eşkenar dörtgeni ABD ve CBD gibi eşit iki üçgene ayırır. Ohalde: *Bir eşkenar dörtgenin köşegenleri bu eşkenar dörtgenin simetri eksenleridir.*



Şek. 113

5° KARE

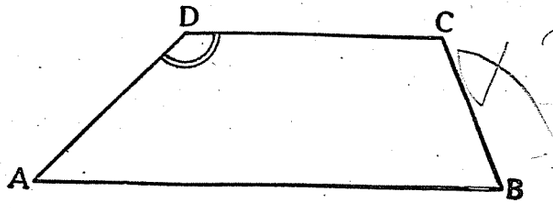
115. *Tanım.* — Ardışık iki kenarı eşit olan dikdörtgene veya bir açısı dik olan eşkenar dörtgene *kare* denir.

Ohalde karede dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin bütün özellikleri vardır (Şek. 113).

6° YAMUK

116. *Tanım.* — İki kenarı birbirine paralel olan içbükey dörtgene *yamuk* denir.

Yamuğun paralel kenarlarına *taban*, iki taban arasındaki uzaklığa *yükseklik* denir.

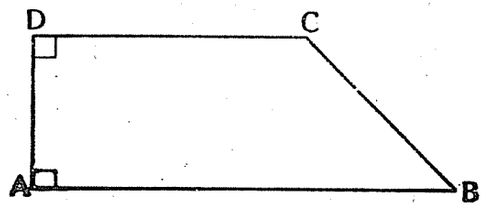


Şek. 114

Bir yamuğun paralel olmayan kenarlarına komşu olan açılar birbirinin bütünleridir.

Meselâ A ve D açıları AD kenarına komşu olup paralel iki doğrunun AD yi kesmesi ile meydana gelen karşı durumlu açılar olduğundan birbirinin bütünleridir (Şek. 114).

Karşıt olarak: Bir dörtgenin ardışık iki açısı birbirinin bütünleri ise bu dörtgen bir yamuktur.



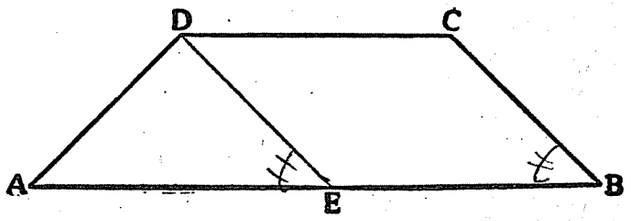
Şek. 115

117. *Özel yamuklar.* Bir kenarı tabanlara dik olan yamuğa *dik yamuk* denir. Ohalde bir dik yamuğun iki açısı dik açıdır (Şek. 115).

Paralel olmayan kenarları birbirine eşit olan yamuğa *ikizkenar yamuk* denir (Şek. 116).

118. *Teorem. — Bir ikizkenar yamukta taban açıları eşittir.*

ABCD yamuğunda AD = BC olsun (Şek. 116). D noktasında BC ye DE paralelini çizelim. DE = BC olduğundan DA = DE olup DAE üçgeni ikizkenardır; ohalde $\widehat{DAE} = \widehat{AED}$ dir. DEA ve CBA açıları yöndeş açı olduklarından birbirine eşit olup, $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ dır. C ve D açıları, B ve A açılarının bütünleri olduklarından eşittir.



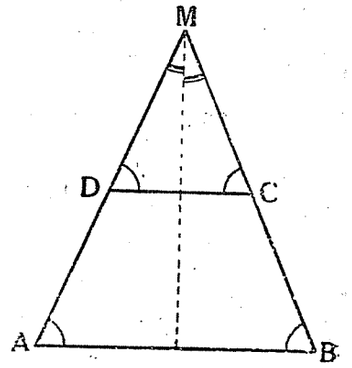
Şek. 116

119. *Karşıt teorem. — Bir yamuğun taban açıları eşitse, bu yamuk ikizkenardır.*

ABCD yamuğunun A ve B açıları (veya C ve D açıları) eşit olsun (Şek. 116). BC ye DE paraleli çizilirse $\widehat{DEA} = \widehat{CBA}$ dır. DAE üçgeni ikizkenar olduğundan AD = DE = CB elde edilir.

120. *Sonuç. — Bir ikizkenar yamuğun köşegenleri eşittir.*

121. *İkizkenar yamuğun simetri ekseni.* — ABCD ikizkenar yamuğunun paralel olmayan kenarlarını uzatalım, kesim noktası M olsun (Şek. 117).

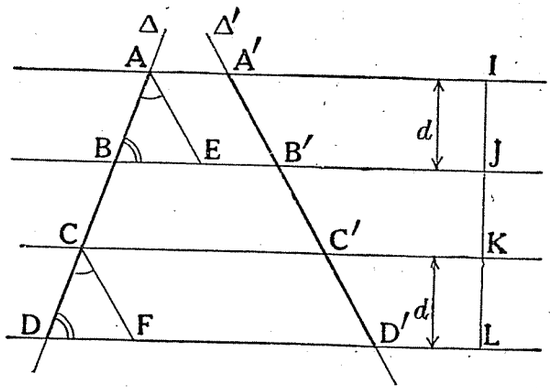


Şek. 117

MAB ve MCD üçgenlerinin taban açıları eşit olduğu için bu üçgenler ikizkenardır. Ohalde M açısının açıortayı aynı zamanda AB nin orta dikmesi olduğundan simetri eksenidir. Bu sebeple ABCD ikizkenar yamuğunun paralel kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğru bir simetri eksenidir.

EŞİT UZAKLIKTA PARALELLER

122. *Teorem. — Birtakım paraleller bir kesen üzerinde eşit doğru parçaları ayırırsa, her kesen üzerinde eşit doğru parçaları ayırır.*



Şek. 118

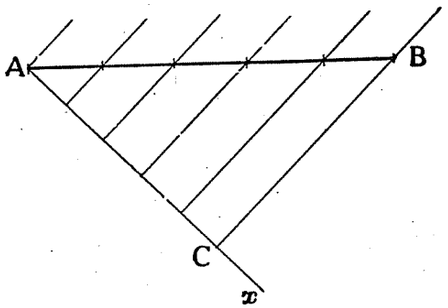
Birtakım paraleller Δ keseni üzerinde AB ve CD gibi eşit doğru parçaları ayırırsa, Δ′ keseni üzerinde de A′B′ ve C′D′ gibi eşit doğru parçaları ayırır (Şek. 118).

Δ′ doğrusuna AE ve CF paralellerini çizelim. AEB′A′ ve CFD′C′ paralelkenarlarının karşılıklı kenarları eşit olduklarından $AE = A'B'$, $CF = C'D'$ dür. ABE ve CDF üçgenlerinin eşitliğinden dolayı $AE = CF$ dir. Öyle ise $A'B' = C'D'$ elde edilir.

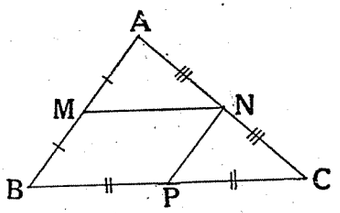
Eğer bu kesenlerden biri paralellere dik ise, $IJ = KL = d$ bulunur.

123. *Çizim. — Bir doğru parçasını eşit parçalara bölmek.*

Bir AB doğru parçasını, meselâ beş eşit parçaya bölmek için A noktasından herhangibir Ax yarım doğrusu çizelim (Şek. 119). Ax üzerinde ardışık olmak üzere beş eşit doğru parçası alalım; beşinci bölüm noktası olan C ile B yi birleştirelim. Her bölüm noktasından CB ye çizilen paralellerin AB yi kestiği noktalar AB yi beş eşit parçaya bölmüş olur (No. 122).



Şek. 119



Şek. 120

124. *Teorem. — Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru, üçüncü kenara paralel ve yarısına eşittir.*

ABC üçgeninin AB, AC, BC kenarlarının orta noktaları M, N, P olsun (Şek. 120).

M noktasından BC ye çizilen paralel doğru, No. 122 den dolayı AC nin orta noktası olan N den geçeceği için MN ile çakışır. Bu sebeple MN, BC ye paraleldir.

Aynı sebeplerle NP, AB ye paraleldir. Ohalde MNPB bir paralelkenardır. Buradan $MN = BP = PC$ olup,

$$MN = \frac{BC}{2}$$

elde edilir.

125. *Tanım.* — Bir yamuğun paralel olmayan kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğruya *orta taban* denir.

126. *Teorem. — Bir yamukta orta taban, tabanlar toplamının yarısına eşittir.*

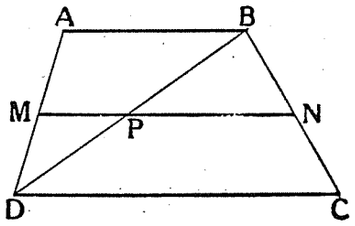
ABCD yamuğunun AD eğik kenarının M orta noktasından tabanlara çizilen paralel BC kenarının N orta noktasından geçer (No. 122). Yamuğun BD köşegeninin orta tabanı kestiği nokta P olsun (Şek. 121). No. 124 den dolayı.

$$MP = \frac{1}{2}AB,\quad PN = \frac{1}{2}DC$$

dir. Taraf tarafa toplarsak

$$MP + PN = MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$$

bulunur.



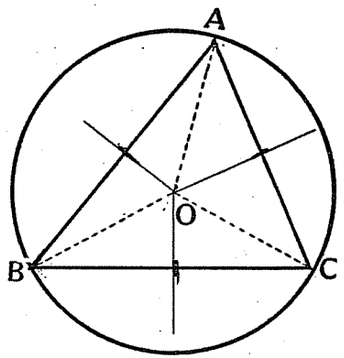
Şek. 121

BİR ÜÇGENDE KESİŞEN DOĞRULAR

127. *Teorem. — Bir üçgenin üç kenar orta dikmesi bir noktada birleşir.*

ABC üçgeninin AB ve AC kenarlarının orta dikmeleri bir O noktasında kesişir (Şek. 122); bu O noktası, AB nin orta dikmesi üzerinde olduğundan A ve B noktalarından, AC nin orta dikmesi üzerinde olduğundan A ve C noktalarından eşit uzaklıkta olup BC nin de orta dikmesi üzerindedir.

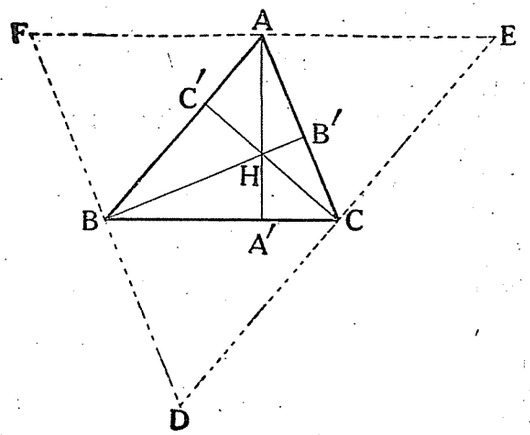
O noktası, ABC üçgeninin köşelerinden eşit uzaklıkta olduğundan bu üç noktadan geçen çemberin merkezidir. Bu çembere üçgenin *çevrel çemberi* denir.



Şek. 122

128. *Teorem. — Bir üçgenin üç yüksekliği bir noktada birleşir.*

ABC üçgeninin yükseklikleri AA′, BB′, CC′ olsun (Şek. 123). Üçgenin üç köşesinden karşı kenarlara paraleller çizelim; bu paralellerin kesişerek meydana getirdiği üçgen DEF olsun. ABCE ve ACBF paralelkenarlarında BC = AE ve BC = FA olduğundan AE = FA dır. Ohalde A noktası EF nin orta noktasıdır. AA′ yüksekliği BC ye dik olduğundan BC nin paraleli olan EF ye orta noktası olan A da diktir. Bu sebeple AA′, EF nin orta dikmesidir. Aynı suretle ispatlanır ki BB′, CC′ yükseklikleri FD ve DE nin orta dikmeleridir. ABC üçgeninin yükseklikleri DEF üçgeninin orta dikmeleridir. Şuhalde bu üç yükseklik bir H noktasında kesişir.

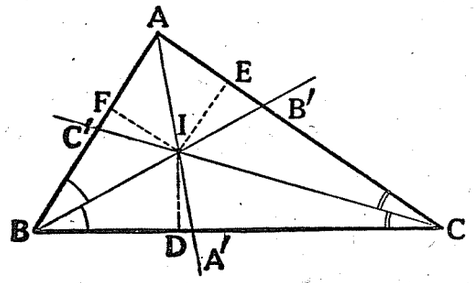


Şek. 123

129. *Tanım.* — Bir üçgenin üç yüksekliğinin kesim noktasına üçgenin *ortosantr* denir.

130. *Teorem. — Bir üçgenin iç açıortayları bir noktada birleşir.*

ABC üçgeninin BB′ ve CC′ iç açıortaylarını gözönüne alalım (Şek. 124.) B ve B′ noktaları CC′ nün iki tarafında olup BB′, CC′ iç açıortayları B ile B′ arasında bir I noktasında kesişir.

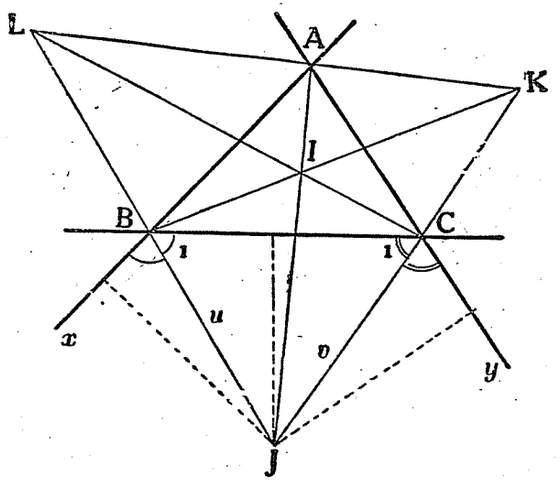


Şek. 124

I noktası ABC açısının açıortayı üzerinde olduğu için AB ve BC kenarlarına eşit uzaklıkta olup IF = ID dir. I noktası aynı zamanda ACB açısının açıortayı üzerinde olduğundan AC ve BC kenarlarından da eşit uzaklıkta olup IE = ID dir. Ohalde ID = IF = IE olur. I noktası AB ve AC kenarlarına eşit uzaklıkta olduğundan BAC açısının açıortayı üzerinde bulunur.

131. *Teorem. — Bir üçgenin iki açısının dış açıortayı ile üçüncü açısının iç açıortayı bir noktada birleşir.*

ABC üçgeninin xBC ve yCB dış açılarının Bu ve Cv dış açıortaylarını gözönüne alalım (Şek. 125). B_1 ve C_1 açıları BC doğrusu ile birer dar açı yaptıkları için Bu ve Cv bir J noktasında kesişir. J noktası Ax (veya AB); Ay (veya AC) ye eşit uzaklıktadır.



Şek. 125

J noktası AB ve AC kenarına eşit uzaklıkta olduğundan üçgenin A açısının açıortayı üzerindedir.

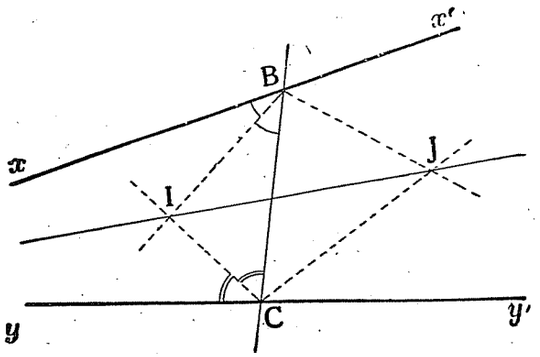
İhtar. — I noktasının JKL üçgeninin ortosantr olduğu kolayca görülmektedir.

132. *Çizim. — Şekil düzlemi içinde kesişmeyen iki doğrunun meydana getirdiği açının açıortayını çizmek.*

xx' ve yy' doğrularının uzantısının bir A noktasında kesiştiğini farzedelim.

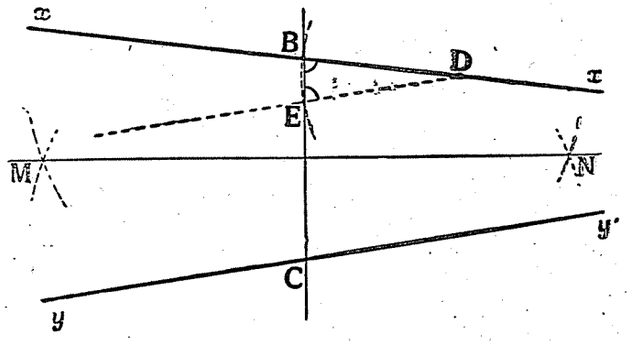
1° xx' ve yy' doğrularını kesen herhangibir BC doğrusu çizelim (Şek. 126). x'BC ve y'CB açılarının açıortaylarını çizersek bunlar bir J noktasında kesişir. Aynı suretle xBC ve yCB açılarının açıortayları bir I noktasında kesişir. I ve J noktaları xx' ve yy' ye eşit uzaklıkta olduklarından IJ, A açısının açıortayıdır.

2° xx' üzerinde alınan herhangibir D noktasından yy' ye bir paralel çizelim. DBE ikizkenar üçgenini (Şek. 127) çizecek olursak bu



Şek. 126

ikizkenar üçgenin BE kenarı yy' yü bir C noktasında keser. ABC üçgeni de bir ikizkenar üçgen olacağından BC nin MN orta dikmesi A açısının açıortayıdır.



Şek. 127

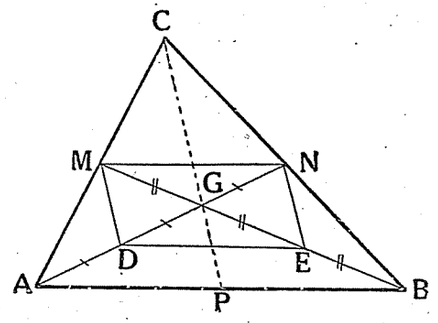
133. *Teorem. — Bir üçgenin üç kenarortayı birbirini kenarlara göre üçte bir uzaklıkta olan ve üçgenin ağırlık merkezi denilen bir noktada keser.*

Bir ABC üçgeninde AN ve BM kenarortaylarını gözönüne alalım (Şek. 128). A ve N, BM nin biri bir tarafında, öteki diğer tarafında olduklarından iki kenarortay A ile N arasında ve üçgenin içinde bir G noktasında kesişir.

MN doğru parçası AB ye paralel ve bunun yarısına eşittir. (No. 124). GA ve GB nin orta noktalarını birleştiren DE doğru parçası AB ye paralel ve yarısına eşittir. Ohalde MNED dörtgeni bir paralelkenar olup köşegenleri birbirini ortaladığından

$$NG = GD = DA$$
$$MG = GE = EB$$

dir.



Şek. 128

Aynı suretle ispatlanır ki CP kenarortayı meselâ AN yi BC kenarından itibaren üçte bir uzaklıkta olan bir noktada keser. Bu nokta ise G noktasından ibaret olduğundan CP de G noktasından geçer ve

$$GP = \frac{1}{2} GC$$

dir.

134. *Bir çokgenin belli olması şartları. —*

Bir üçgenin biri kenar olmak üzere 3 elemanın bilinmesi ile belli olduğunu daha evvel söylemiştik. Şimdi dörtgen, beşgen,... n genin belli olması şartını arayalım.

Dörtgen bir köşegeni ile iki üçgene ayrılacağından bu iki üçgenin belli olması dörtgeni de belirtir. Dörtgeni ayırdığımız iki üçgenden birinin çizilmesi için 3 eleman (biri kenar) lâzımdır. Bu üçgen çizilince dörtgenin köşegeni de belirmiş olur. Ohalde diğer üçgenin çizilmesi için daha iki elemanın verilmesi icap eder. Şuhalde bir dörtgenin belirmesi için iki kenar olmak üzere beş elemanın bilinmesi lâzımdır.

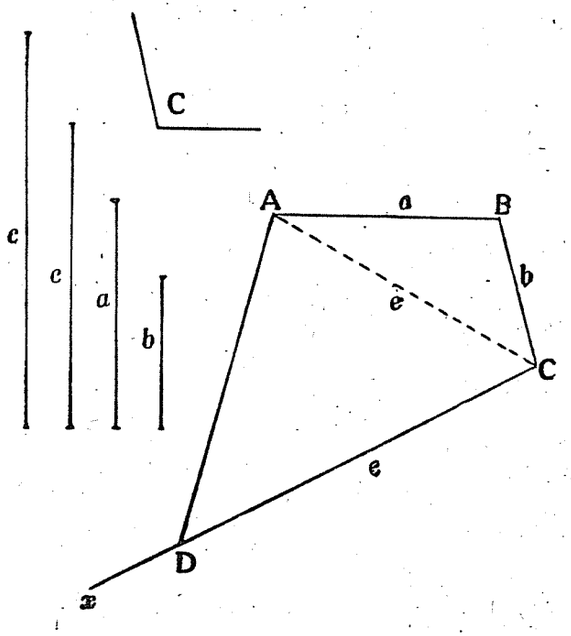
Aynı suretle, yani üçgenlere ayırıp bunların çizilebilme imkânları araştırılarak aşağıdaki netice elde edilir:

Üçgen	için	1	Kenar	(uzunluk)	olmak	üzere	3	eleman lâzımdır.
Dörtgen	»	2	»	»	»	»	5	» »
Beşgen	»	3	»	»	»	»	7	» »
Altıgen	»	4	»	»	»	»	9	» »
. . . . .								
. . . . .								
n gen	»	$n-2$	»	»	»	»	$2n-3=2(n-2)+1$	lâzımdır.

Şimdi bu belli olma şartlarını veren ifadeleri örnekler üzerinde açıklayalım :

135. *Uygulama I. — a, b, e, c, $\widehat{C}$ elemanlariyle verilen dörtgeni çizmek.*

ABC üçgeninin üç kenarı bilindiği (*a, b, e* kenarları) için derhal bu üçgen çizilebilir. Sonra köşe C olmak üzere BC*x* açısı çizilir. Diğer taraftan D noktası, C noktasından *c* kadar uzaklıkta olduğundan merkezi C, yarıçapı *c* olan çemberin C*x* i kestiği D noktası A ile birleştirilirse ABCD dörtgeni elde edilmiş olur (Şek. 129).

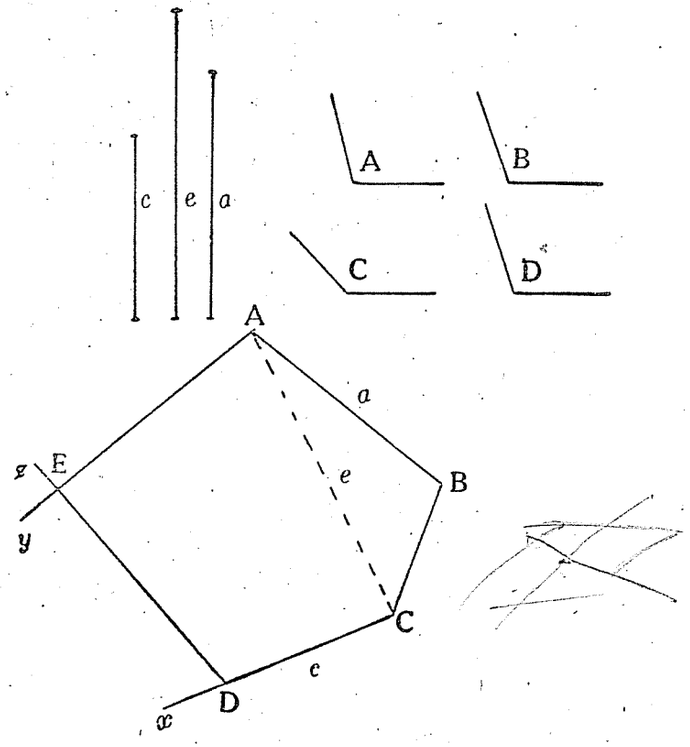


Şek. 129

II. — a, e, c, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ elemanları ile verilen beşgeni çizmek.

ABC üçgeninde *a*, $\widehat{B}$ ve AC = *e* elemanları bilindiğinden bu üçgen çizilir. Sonra köşe C olmak üzere $\widehat{BCx} = \widehat{C}$ açısı alınır ve C*x* üzerinde CD = *c* alarak D noktası bulunur. Köşeleri D ve A olan $\widehat{CDz} = \widehat{D}$ ve $\widehat{BAy} = \widehat{A}$ açılarının A*y* ve D*z* kenarlarının kesim noktası, beşgenin E köşesini verir. Böylece ABCDE beşgeni elde edilmiş olur (Şek. 130).

İhtar I. — Uygulama I ve II nin çizimlerinin irdelenmesi çok uzun ve belki öğrencinin anlaması müşkül olacağı düşünülerek bu irdelemelerden vazgeçilmiştir.



Şek. 130

İhtar II. — Dörtgen ve beşgen için yaptığımız bu çizimleri ve çokgenlerin belli olma şartlarını gözönüne alarak öğrenci bir çok çizim problemleri tertiplemeli ve çizmelidir.

VI. ALIŞTIRMALAR

1. Bir paralelkenarın merkezinden geçen iki doğrunun kenarları kestiği noktalar yeni bir paralelkenarın köşeleridir. İspatlayınız.

2. Bir ABCD paralelkenarı gözönüne alınıyor. AB ve CD üzerinde AE = CF; AD ve BC üzerinde AG = CH uzunlukları alınıyor :

1° EGFH bir paralelkenardır.

2° ABCD ve EGFH paralelkenarları aynı merkezlidir. İspat ediniz.

3. Bir ABC üçgeninin B ye C köşegenlerinden geçen yükseklikler H noktasında; B noktasından AB ye çizilen dikme ile C noktasından AC ye çizilen dikme D noktasında kesişiyorlar :

1° BDCH dörtgeninin paralelkenar olduğunu gösteriniz.

2° BC nin orta noktası olan M nin HD nin de orta noktası olduğunu ispatlayınız.

3° ABC üçgenini nasıl seçmelidir ki DH, A dan geçsin?

4° ABCD dörtgeninin A ve D açılarının bütünler açı olduğunu gösteriniz.

4. Bir ABC üçgeninin BC tabanı üzerinde alınan bir D noktasından AB ve AC ye çizilen paraleller A dan BC ye çizilen paraleli E ve F noktalarında kesiyorlar :

1° ABC ve DEF üçgenlerinin eşit olduğunu gösteriniz.

2° CE ve BF uzunluklarının eşit olduğunu gösteriniz.

3° Elde edilen şeklin bir simetri merkezi var mıdır?

5. Bir ABCD paralelkenarının BD köşegenine çizilen paralel herhangibir doğru, AB, BC, CD, DA yı sıra ile M, N, P, Q noktalarında kesiyor :

1° MP ve NQ uzunluklarının eşit olduğunu gösteriniz.

2° Verilen bir O noktasından öyle bir doğru çiziniz ki bu doğru paralelkenarı $MP = NQ$ olacak surette M, N, P, Q noktalarında kessin.

6. Bir ABCD paralelkenarı gözönüne alınıyor. Bu paralelkenarın açılarının ortayları birbirini M, N, P, Q noktalarında kesiyor :

1° MNPQ dörtgeni nasıl bir dörtgendir?

2° ABCD paralelkenarı bir dikdörtgen ise, MNPQ dörtgeni nasıl bir dörtgen olur?

7. Bir ABCD karesinin kenarları üzerinde AA′, BB′, CC′, DD′ karenin kenar uzunluğunun dörtte biri olmak üzere A′, B′, C′, D′ noktaları alınıyor. A′B′C′D′ nün de bir kare olduğunu, bu iki karenin köşegenlerinin aynı noktada birleştiklerini ispatlayınız.

8. Bir ABCD eşkenar dörtgeninde AD ye BM dikmesi, BC ye DN dikmesi çiziliyor. BMDN nin bir dikdörtgen olduğunu ispatlayınız.

9. Bir ABC üçgeninde AB, AC, BC kenarlarının orta noktaları M, N, P ile gösteriliyor. Üçgenin AH yüksekliği ile MN, NP, MH çiziliyor. MNPH dörtgeninin bir ikizkenar yamuk olduğunu ispatlayınız.

10. Bir ABCD yamuğunun paralel olmayan kenarlarının kesim noktası E, AE ve BE nin orta noktaları M, N; AC ve BD köşegenlerinin orta noktaları P, Q ise, MNPQ dörtgeni de bir yamuktur. İspat ediniz.

11. Bir ABC ikizkenar üçgeninin $(AB = AC)$ AH yüksekliği ile BB′ kenarortayı verildiğine göre bu ikizkenar üçgeni çiziniz.

12. İki kenarortayı eşit olan üçgenin ikizkenar olduğunu ispatlayınız.

13. İki köşegeni eşit olan yamuğun ikizkenar olduğunu ispatlayınız.

14. Bir ABCD dörtgeninin kenarlarının M, N, P, Q orta noktaları birleştiriliyor :

1° MNPQ dörtgeni nasıl bir dörtgendir?

2° ABCD dörtgenini nasıl seçmelidir ki MNPQ bir dikdörtgen, bir eşkenar dörtgen, bir kare olsun?

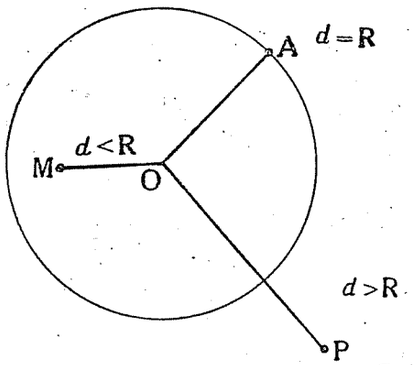
BÖLÜM VII

DAİRE

136. *Tanımlar.* — Bir düzlem içinde, verilen bir noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yerine *çember;* verilen noktaya da *merkez* denir.

Bir çember bulunduğu düzlemi iki parçaya ayırır. Bir bu çemberin içinde kalan kısım, diğeri de çemberin dışında kalan kısımdır. Çemberin içinde kalan kısma *daire* denir. Demek ki çember bir *çizgi*, daire ise bir *yüzeydir*.

Merkezi çemberin herhangıbir noktasına birleştiren doğru parçasına çember ve dairenin *yarıçapı* denir. Çemberin tanımından anlaşılacağı üzere bir çemberin bütün yarıçapları birbirine eşittir.



Şek. 131

Bir O çemberinin üzerinde A, içinde M ve dışında bir P noktası alalım.

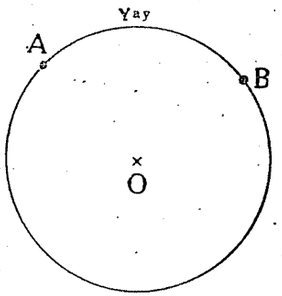
Noktaların merkeze olan uzaklıkları d ve yarıçapı R ile gösterirsek M için $d < R$, A için $d = R$, P için $d > R$ dir (Şek. 131).

Karşıt olarak: $d < R$ ise nokta çemberin içinde, $d = R$ ise nokta çember üzerinde, $d > R$ ise nokta çemberin dışındadır.

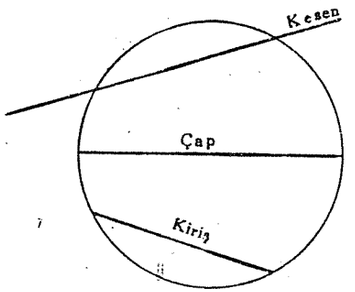
Bir çember üzerinde alınan A ve B gibi iki nokta çemberi iki parçaya ayırır (Şek. 132). Bu parçalardan her birine *çember yayı* veya sadece *yay* denir.

Bir çemberin iki noktasından geçen doğruya *kesen*, çemberin üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçasına *kiriş*, merkezden geçen kirişe *çap* denir (Şek. 133).

Bir çemberin çapı, yarıçapının iki katı olduğuna göre, bir çemberin bütün çapları birbirine eşittir.



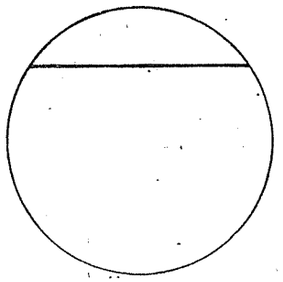
Şek. 132

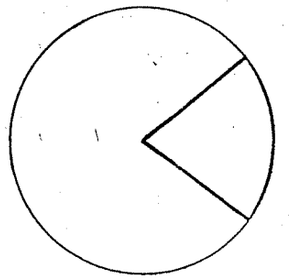


Şek. 133

Bir kiriş daireyi iki parçaya ayırır, bu parçalardan herbirine *daire parçası* denir (Şek. 134).

İki yarıçap daireyi iki parçaya ayırır, bu parçalardan herbirine *daire kesmesi* denir (Şek. 135).


Şek. 134

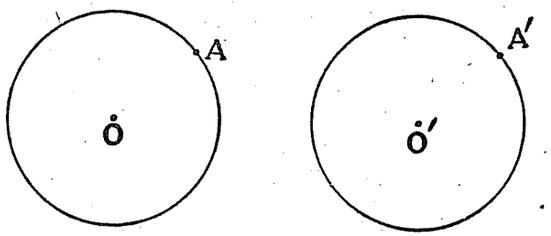

Şek. 135

137 *Teorem. — Yarıçapları eşit olan iki çember eşittir.*

O, O′ çemberlerinin yarıçapları eşit olsun (Şek. 136). Birinci çemberin O merkezi ikinci çemberin O′ merkezine gelmek üzere birinci çemberi ikincinin üzerine kaydıralım. O çemberine ait olan bir A noktası O′ çemberi üzerinde bir A′ noktasına gelir. O′A′, O çemberinin yarıçapına eşit olduğundan A′ noktası O çemberi üzerine gelir.

O′ çemberinin herhangibir noktasının O çemberi üzerine geleceği aynı şekilde gösterilebileceği için bu iki çember eşittir.

İhtar. — Bir çemberi başka bir çember üzerine getirmek için bunların merkezlerini çakıştırmak yeter.



Şek. 136

138. *Teorem. — Bir çemberde veya eşit iki çemberde çap, herhangibir kirişten büyüktür.*

Bir O çemberinde AC kirişi ile AB çapını alalım (Şek. 137). Çemberin O merkezini C ile birleştirelim. OAC üçgeninde No. 66 dan dolayı

$$OA + OC > AC$$

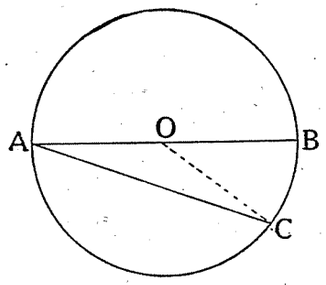
dir. $OC = OB$ olduğundan

$$OA + OB > AC$$

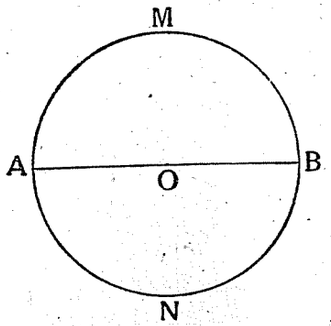
veya

$$AB > AC$$

bulunur.



Şek. 137



Şek. 138

139. *Teorem. — Bir çemberin çapı, çemberi iki eşit yaya ayırır.*

Bir O çemberini AB çapı, AMB ve ANB yaylarına ayırmış olsun (Şek. 138).

AMB yi AB etrafında katlarsak yarıçapların eşitliğinden dolayı AMB yayı ANB üzerine gelir. Ohalde bu iki yay eşittir.

$\overset{\frown}{AMB}$ ve $\overset{\frown}{ANB}$ den herbirine *yarım çember* denir.

140. *Sonuçlar. I. — Bir dairenin çapı, daireyi iki eşit parçaya ayırır.*

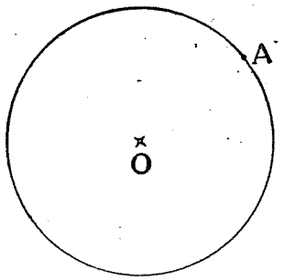
II. — Bir çember (veya dairede) her çap bir simetri eksenidir.

141. *Bir çemberin belli olması.* — Bir, iki, üç... noktadan geçen çemberleri inceleyelim :

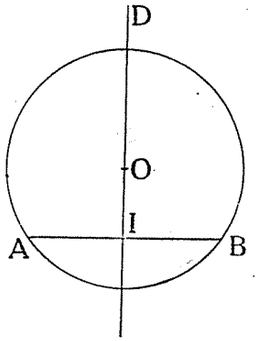
1° Bir noktadan geçen çember. — Verilen bir A noktasından geçen çemberi çizmek için bir O noktasını merkez olarak almak ve OA yarıçapı ile bir çember çizmek yeter (Şek. 139).

Çemberin O merkezi keyfî olarak seçilebileceği için, A noktasından geçen sonsuz çember çizilebilir. Ohalde :

Verilen bir noktadan geçen sonsuz çember vardır.



Şek. 139



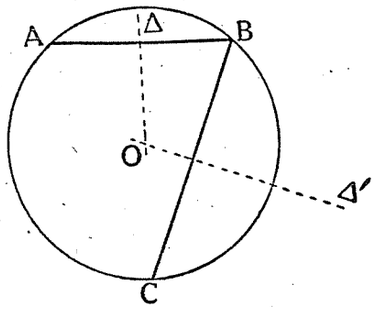
Şek. 140

2° İki noktadan geçen çember. — Verilen iki nokta A ve B olsun (Şek. 140). Çizeceğiniz çemberin merkezi, A ve B noktalarından eşit uzaklıkta olması gerekir ki, sabit iki noktadan eşit uzaklıkta olan noktalar AB doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir. Şuhalde orta dikme üzerinde alınan keyfî bir O noktası merkez, OA yarıçap olmak üzere çizilen çember aranan çemberdir.

O noktası D orta dikmesi üzerinde gezebileceği için A ve B noktalarından geçen çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri D orta dikmesidir. Ohalde :

Verilen iki noktadan geçen sonsuz çember vardır.

3° *Üç noktadan geçen çember.* — Verilen üç noktanın bir doğru üzerinde olmadığını farzedelim. Bu üç noktadan geçen çemberi çizmek için, çemberin merkezini ve yarıçapını bulmak icap eder (Şek. 141). A ve B noktalarından eşit uzaklıkta olan noktalar Δ orta dikmesi, B ve C noktalarından eşit uzaklıkta olan noktalar Δ′ orta dikmesi üzerindedir. Δ ve Δ′ nün kesim noktası olan O; A, B, C noktalarından eşit uzaklıkta olduğundan O, bu üç noktadan geçen çemberin merkezidir.



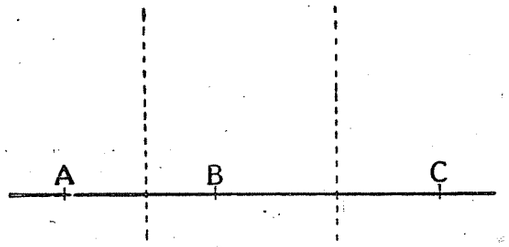
Şek. 141

$OA = OB = OC$ olduğundan O merkezli ve OA yarıçaplı çember B ve C noktalarından da geçer. Ohalde :

Bir doğru üzerinde olmayan üç noktadan bir çember geçer.

Bu çembere, A, B, C noktalarının meydana getirdiği ABC üçgeninin *çevrel çemberi* denir.

4° *Üç nokta bir doğru üzerinde ise.* — A, B, C noktaları bir doğru üzerinde olsun (Şek. 142). AB, AC, BC doğru parçalarının orta dikmeleri aynı doğruya dik olduklarından birbirine paraleldir. Bu sebeple problemin çözümü yoktur.



Şek. 142

5° *Üçten fazla nokta olursa.* — Meselâ, A,B,C,D gibi herhangi dört noktayı alalım. A, B, C noktalarından bir çember geçer. Dördüncü noktanın bu üç noktadan geçen çemberin merkezine uzaklığı, yarıçapa eşitse, nokta çember üzerindedir. Aksi halde çember üzerinde değildir. Ohalde :

Herhangi dört veya daha fazla nokta bir çember üzerinde bulunmayabilir.

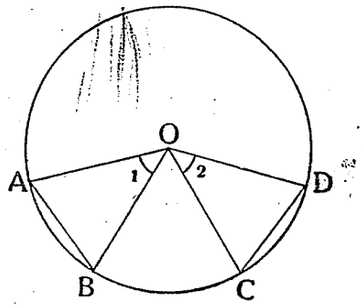
142. *İki çemberin ortak noktaları.* — Birbirini kesen iki çemberin en çok iki ortak noktası vardır. Çünkü, eğer bu iki çemberin üç ortak noktası olsa, üç noktadan bir çember geçeceği için bu iki çember çakışır.

143. *Teorem. — Bir çemberde veya eşit çemberlerde :*

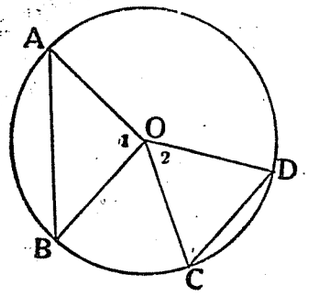
1° Eşit yayların kirişleri de eşittir.

2° Herbiri 2D dan küçük olmak şartiyle büyük yayın kirişi, küçük yayın kirişinden büyüktür.

1° O çemberinde $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ olduğundan $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ dir (Şek. 143). OAB ve OCD üçgenlerinin eşitliğinden dolayı $AB = CD$ dir.



Şek. 143



Şek. 144

2° $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$ olsun (Şek. 144). OBA ve OCD üçgenlerinden

$$OA = OC, \qquad OB = OD, \qquad \widehat{O_1} > \widehat{O_2}$$

olduğundan

$$AB > CD$$

bulunur (No. 79).

144. *Karşıt teorem. — Bir çemberde veya eşit çemberlerde :*

1° Eşit kirişlerin yayları da eşittir.

2° Büyük kirişe ait yay, küçük kiriş yayından büyüktür.

1° $AB = CD$ olduğundan C noktası A ya gelecek surette CD kirişi AB üzerine götürülürse D noktası da B ye geleceğinden CD ve AB yayları çakışır, öyle ise $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ dir (Şek. 143).

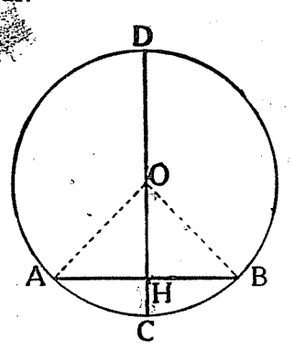
2° Teoremin aslına dayanarak, olmayana ergi metodu ile ispat kolaylıkla yapılır.

145. *Teorem. — Bir çemberde bir kirişe dik olan çap, kirişi ve kirişe ait her iki yayı ortalar.*

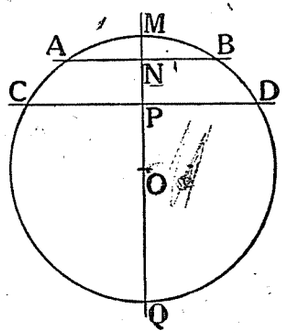
Bir O çemberinde AB kirişine dik olan çap, AB yi H, AB yaylarını C ve D noktalarında kessin (Şek. 145). OAB üçgeni bir ikizkenar üçgen olduğu için, AB tabanına dik olan OH doğrusu AB nin orta dikmesidir. Şuhalde CD bir simetri eksenidir. Yarım dayire CD etrafında katlanırsa B noktası A ya geleceğinden

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \quad \text{ve} \quad \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$$

bulunur.



Şek. 145



Şek. 146

146. *Sonuç. — Bir çemberde paralel kirişler arasında kalan yaylar birbirine eşittir.*

Çemberin O merkezinden paralel kirişlere çizilen MQ dikmesi şeklin simetri ekseni olacağından, şekil MQ etrafında döndürülecek olursa, BD ve AC yayları çakışacağı için eşittir (Şek. 146).

147. *Teorem. — Bir çemberde kirişin orta noktasiyle merkezi birleştiren doğru kirişe diktir.*

148. *Teorem. — Bir çemberde, kirişin orta noktasından kirişe çıkılan dikme, çemberin merkezinden geçer.*

Her iki teorem, ikizkenar üçgenin özelliklerini hatırlamakla kolayca ispatlanır.

149. *Teorem. — Bir çemberde veya eşit çemberlerde :*

1° Merkezden eşit uzaklıkta olan kirişler eşittir.

2° Merkezden uzak olan kiriş, yakın olan kirişten küçüktür

1° Bir O çemberinde BA ve CD kirişlerinin merkezden uzaklıkları eşit olsun (Şek. 147). Bu kirişlere O merkezinden çizilen dikmelere OH ve OH′ diyelim. $OH = OH'$ ve OHB ve OH′D dik üçgenlerinde hipotenüsler de yarıçap olduğundan bu üçgenler eşittir.

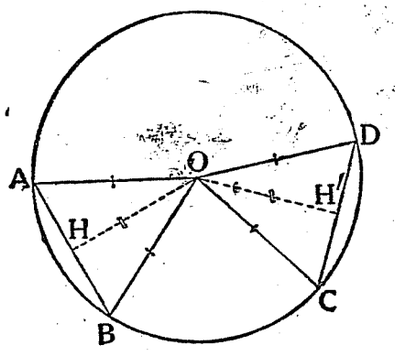
Suhalde bu iki dik üçgen eşit olup, $HB = H'D$ dir. Diğer taraftan,

$$AB = 2HB, \qquad CD = 2H'D$$

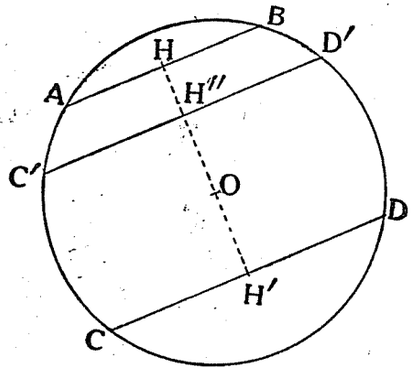
olduklarından

$$AB = CD$$

bulunur.



Şek. 147



Şek. 148

2° O çemberinde $OH > OH'$ olsun (Şek. 148). OH üzerinde

$$OH'' = OH'$$

alalım. H″ noktası O ile H arasına düşer. H″ den OH ya C′D′ dik kirişini çizelim

$$C'D' = CD$$

olacağından AB kirişi ile C′D′ kirişini karşılaştıralım :

$$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{C'D'}$$

dür. Çünkü AB yayı C′D′ yayının bir parçasıdır. Ohalde $AB < C'D'$ olacağından

$$AB < CD$$

dır.

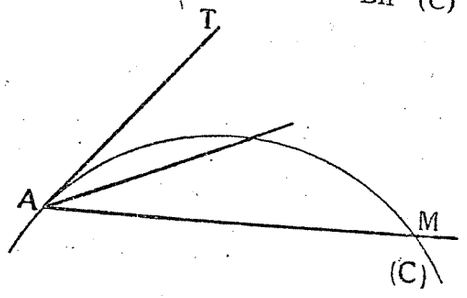
150. *Karşıt teorem. — Bir çemberde veya eşit çemberlerde :*

1° Eşit kirişlerin merkezden uzaklıkları eşittir.

2° Küçük kiriş, merkezden daha uzakta bulunur.

Olmayana ergi metodu ile ispat kolayca yapılabilir. Bunu bir uygulama olarak öğrenciye bırakıyoruz.

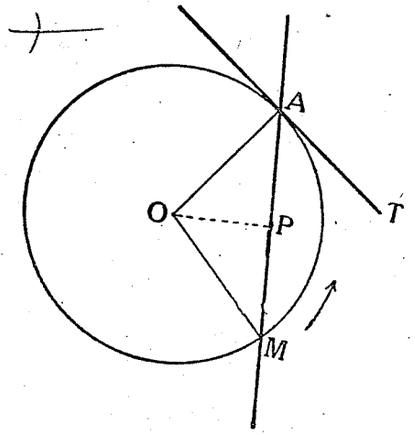
151. *Teğet kavramı.* — Bir (C) eğrisi ile bu eğri üzerinde bir A noktası alalım (Şek. 149). Eğri üzerinde alınan herhangibir M noktasının A ya olan MA uzaklığı sıfıra yaklaşırsa, M noktası A ya *yaklaşıyor* denir. M noktası A ya yaklaşırken MA doğrusu A dan geçen bir çok konumlar alır. MA uzaklığı sıfıra yaklaşınca MA doğrusunun (C) eğrisi ile bir A ortak noktası olur ve MA da AT konumunu alır ki, işte bu AT doğrusu, A noktasında (C) eğrisine *teğettir* denir.



Şek. 149

152. *Teorem. — Bir çemberin bir noktasındaki teğeti bu noktadan geçen yarıçapına diktir.*

Bir O çemberi ile bu çember üzerinde bir A noktası alalım (Şek. 150). O çemberinin A noktasındaki AT teğeti, çemberin M noktasının A ya yaklaşmasından ibaret olan MA keseninin bir limit durumudur. Çemberin O merkezinden MA kirişine çizilen OP dikmesi MA nın ortasından geçer M noktasının çemberin MA yayını çizerek A ya gelmesini düşünelim. P noktası daima MA kirişinin ortasında kaldığı için A üzerine gelir. Daima dik kalan OPM açısının PM kenarı OA ya dik bir AT konumunu alır. Ohalde MA nın limit konumu OA ya diktir.



Şek. 150

153. *Karşıt teorem. — Bir çemberin yarıçapına çember üzerindeki ucundan çizilen dikme çembere teğettir.*

O çemberinin üzerinde bir A noktası alalım, bu A noktasından çemberin OA yarıçapına AT dikmesini çizelim. Bu dikme çembere A noktasında teğettir. Çünkü, bir an için AT nin teğet olmadığını farzedelim. A noktasındaki çemberin teğetini çizelim. Bu teğet esas teoreme göre OA ya dik olup, AT ile çakışır. Şuhalde AT dikmesi teğettir.

154. *Sonuç. — Bir çember merkezinin bir doğruya olan uzaklığı :*

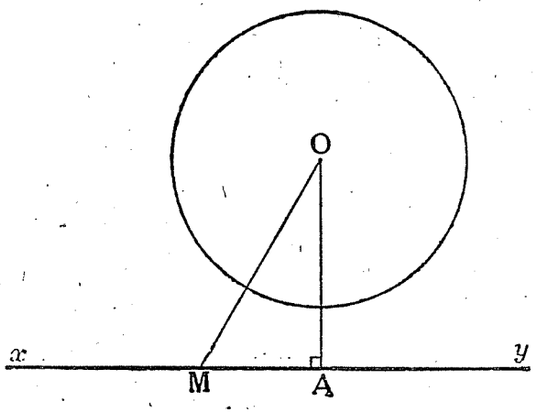
1° Yarıçaptan büyükse, doğru çemberin dışında,

2° Yarıçapa eşitse, doğru çembere teğet,

3° Yarıçaptan küçükse, doğru çemberin bir kesenidir.

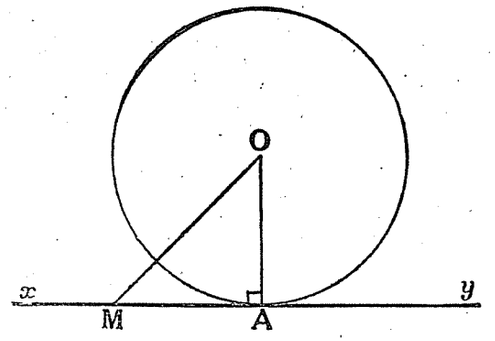
Çember merkezinin xy doğrusuna olan uzaklığını d, çember yarıçapını R ile gösterelim :

1° Çemberin O merkezinden xy doğrusuna OA dikmesini çizelim (Şek. 151). $d > R$ olduğundan A noktası çemberin dışındadır. xy doğrusu üzerinde her M noktası da çemberin dışındadır. Çünkü $OM > OA$ olduğundan $OM > R$ dir.



Şek. 151

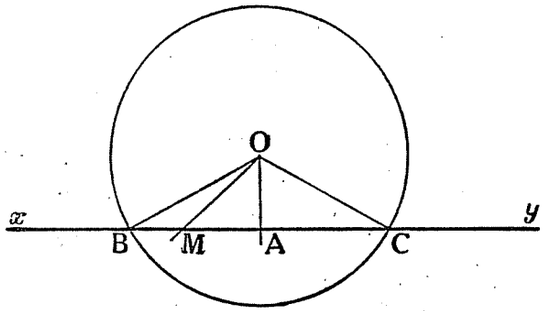
2° $d = R$ ise, A noktası çember üzerindedir (Şek. 152). A dan başka xy üzerinde herhangibir M noktası çember üzerinde değildir; çünkü, $OM > OA$ olduğundan $OM > R$ dir. Ohalde xy doğrusu ile çemberin bir ortak noktası vardır ve doğru, bu noktada çembere teğettir.



Şek. 152

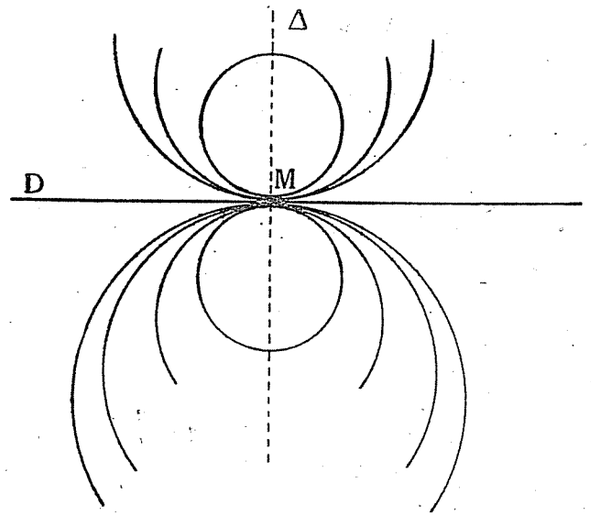
3° $d < R$ ise, A noktası çemberin içindedir (Şek. 153).
Sonuç olarak :

$d > R$ ise, doğru çemberin dışındadır.
$d = R$ ise, doğru çembere teğettir.
$d < R$ ise, doğru çemberin kesenidir.



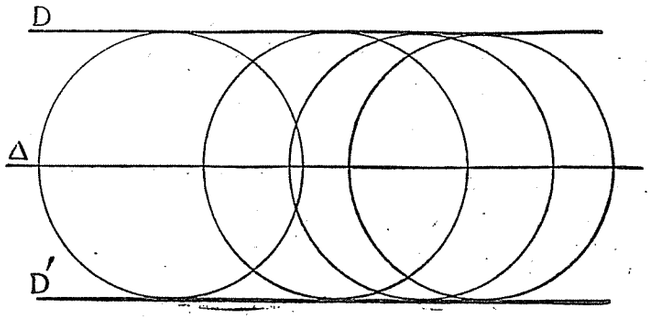
Şek. 153

155. *Geometrik yer I. — Verilen bir D doğrusuna, bu doğrunun bir M noktasında teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, M noktasından bu D doğrusuna çizilen Δ dikmesidir* (Şek. 154).



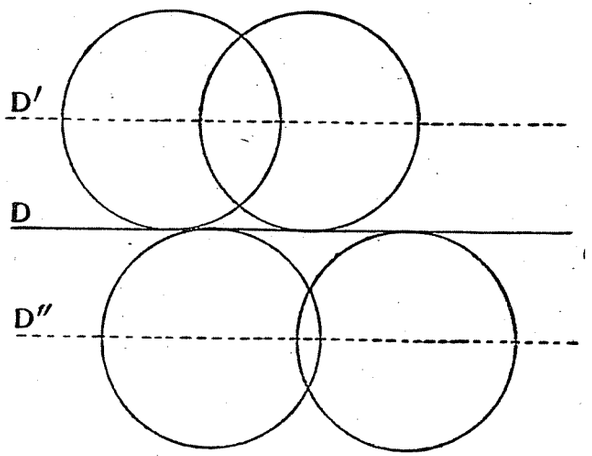
Şek. 154

156. *Geometrik yer II. — Paralel iki doğruya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bu doğrular arasında ve doğrulara eşit uzaklıkta, paralel bir doğrudur* (Şek. 155).



Şek. 155

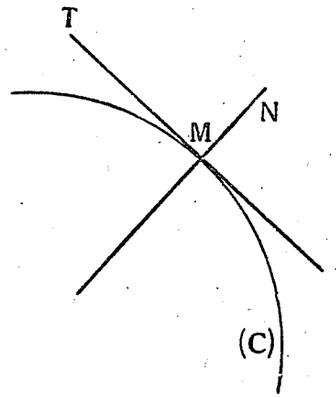
157. *Geometrik yer III. — Verilen bir doğruya teğet ve yarıçapları sabit olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, verilen doğruya paralel olan iki doğrudur* (Şek. 156).



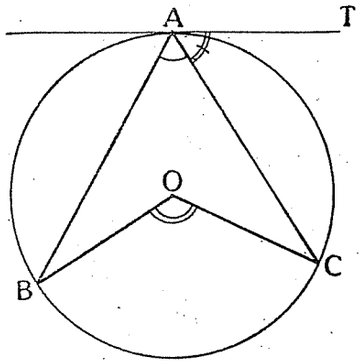
Şek. 156

158. *Normal.* — Bir (C) eğrisi ile bu eğrinin M noktasındaki MT teğetini gözönüne alalım (Şek. 157). Değme noktasından MT teğetine çizilen MN dikmesine (C) eğrisinin *normali* denir.

Bir çember üzerinde alınan A noktasındaki teğet OA yarıçapına dik olduğundan, bir çemberin normalleri yarıçapa çakışıktır. Karşıt olarak çembere herhangibir noktasından çizilen normal merkezden geçer.



Şek. 157



Şek. 158

MERKEZ VE ÇEVRE AÇILARI

159. *Tanımlar.* — Bir çemberin O merkezini çember üzerinde alınan B ve C noktalarına birleştirelim (Şek. 158). Bu iki yarıçapin teşkil ettiği BOC açısına *merkez açı* denir.

Çember üzerinde alınan herhangibir A noktasından çizilen iki kirişin teşkil ettiği BAC açısına da *çevre açı* denir.

Bir çevre açının kenarlarından biri çembere teğetse bu açıya *teğet - kiriş açısı* denir (CAT açısı).

160. *Teorem. — Bir çemberde veya eşit çemberlerde :*

1° Eşit merkez açılar karşısındaki yaylar eşittir.

2° Büyük merkez açı karşısında büyük yay bulunur.

1° Şek. 159 daki O_1 ve O_2 merkez açıları eşit olsun. C noktası A üzerine gelmek üzere O_2 açısını O_1 üzerine getirelim :

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$

olduğu için OD, OB üzerine geleceğinden D ve B noktaları çakışır. Ohalde

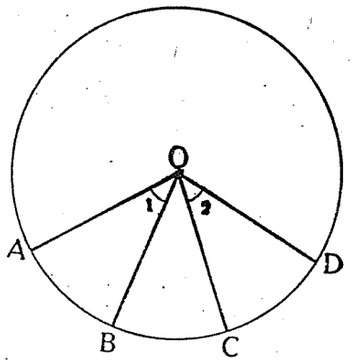
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

dir.

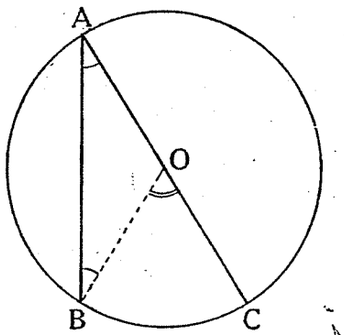
2° $\widehat{O_1} > \widehat{O_2}$ farzedelim. C noktası A üzerine gelecek surette O_2 açısını O_1 üzerine getirelim D noktası A ile B arasında AB yayı üzerinde bir noktaya gelir. Ohalde

$$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$$

dir.



Şek. 159



Şek. 160

161. *Karşıt teorem. — Bir çemberde veya eşit çemberlerde :*

1° Eşit yaylar merkezden eşit açı altında görülür.

2° Farklı iki yaydan büyük olan yay, merkezden daha büyük açı altında görülür.

1° $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ olsun. OAB. OCD dayire kesmeleri üst üste getirilebileceği için

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$

dir.

2° $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$ farzedelim. C noktası A üzerine getirilirse, D noktası A ile B arasına düşeceği için

$$\widehat{O_1} > \widehat{O_2}$$

dir.

162. *Teorem. — Bir çevre açısı, aynı yayı gören merkez açısının yarısına eşittir.*

1 inci hal. — Çevre açısının kenarlarından biri, çemberin çapı olsun (Şek. 160).

OAB ikizkenar üçgeninde

$$\widehat{A} = \widehat{B}$$

dir. BOC açısı bu üçgenin bir dış açısı olduğundan, No. 47, Netice I den

$$\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{B} = 2\widehat{A}$$

olup

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

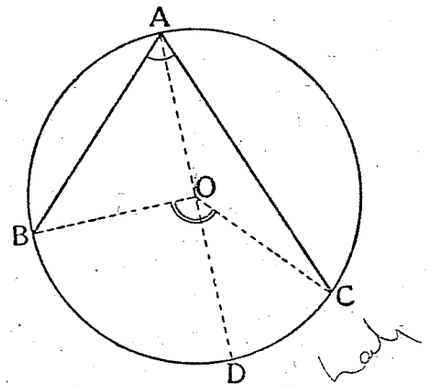
elde edilir.

2 nci hal. — *Çemberin merkezi çevre açısının içindedir* (Şek. 161). Çemberin AD çapını çizelim. 1 inci halden dolayı

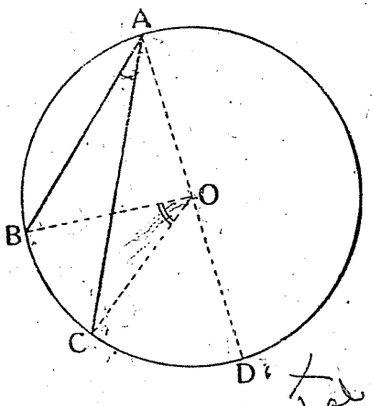
$$\widehat{BOD} = 2\widehat{BAD}, \qquad \widehat{DOC} = 2\widehat{DAC}$$

olup taraf tarafa toplanırsa

$$\widehat{BOD} + \widehat{DOC} = 2(\widehat{BAD} + \widehat{DAC})$$



Şek. 161



Şek. 162

bulunur. Buradan

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$$

veya

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

elde edilir.

3 üncü hal. — *Çemberin merkezi çevre açısının dışındadır* (Şek. 162). O dan geçen çap AD olsun.

$$\widehat{BOD} = 2\widehat{BAD}, \qquad \widehat{COD} = 2\widehat{CAD}$$

olup, taraf tarafa çıkarılırsa

$$\widehat{BOD} - \widehat{COD} = 2(\widehat{BAD} - \widehat{CAD})$$

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$$

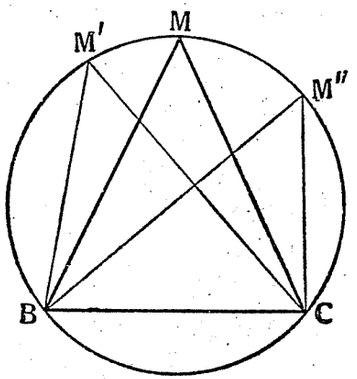
buradan da

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$

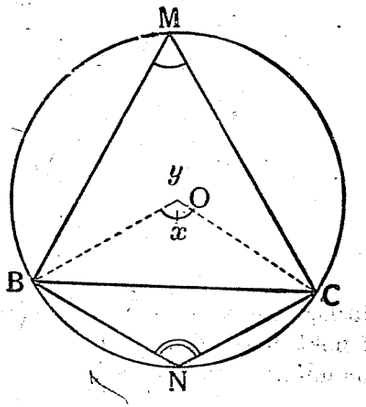
elde edilir.

163. *Sonuçlar. I.* — *Aynı yayı veya eşit yayları gören çevre açılar eşittir.*

Çünkü, bu çevre açıların hepsi aynı yayı gören merkez açısının yarısına eşittir (Şek. 163).



Şek. 163



Şek. 164

II. — *Bir çemberde çapı gören çevre açılar dik açıdır.*

III. — *İki çevre açısı eşitse, bu açıların gördükleri yaylar da eşittir.*

IV. — *Bir çemberde aynı kirişi gören ve kirişin iki tarafında bulunan çevre açıları birbirinin bütünleridir.*

$$\widehat{M} = \frac{x}{2}, \quad \widehat{N} = \frac{y}{2}$$

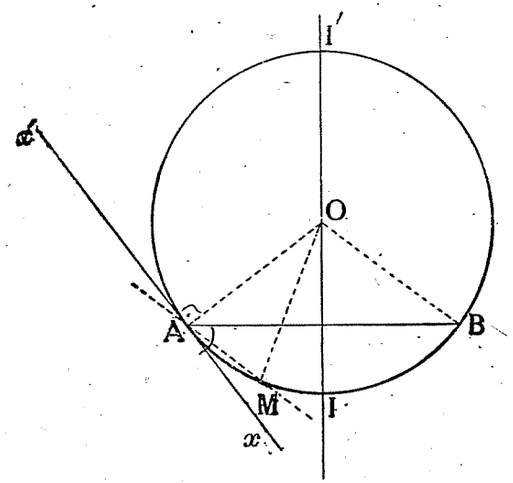
olduğundan

$$\widehat{M}+\widehat{N}=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{x+y}{2}=\frac{4^D}{2}=^D2$$

bulunur (Şek. 164).

164. *Teorem. — Bir teğet - kiriş açısı aynı yayı gören merkez açısının yarısına eşittir.*

xAB teğet - kiriş açısı ile aynı yayı gören AOB merkez açısının OI açıortayını çizelim (Şek. 165). Bu açıortay AOB ikizkenar üçgeninin aynı zamanda yüksekliğidir.



Şek. 165

Diğer taraftan OA yarıçapı Ax teğetine A noktasında diktir. IOA ve BAx açıları kenarları dik açılar olup birbirine eşittir. Şuhalde BAx açısı AOB merkez açısının yarısına eşittir.

Bu teoremi şu suretle ispatlamak da kabildir:

BAM çevre açısı BOM merkez açısının yarısına eşittir. M noktası A ya gittikçe yaklaşsa, MA kirişi de Ax yarım teğetine yaklaşır; en nihayet M noktası A ile çakışınca, BAM açısı BAx ve BOM açısı da BOA limit konumunu alır. Ohalde,

$$\widehat{BAx}=\frac{\widehat{BOA}}{2}$$

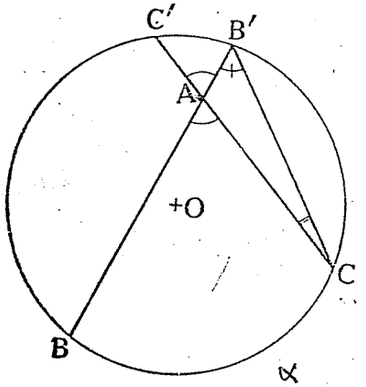
bulunur.

165 *İç açı.* — Köşesi bir çemberin içinde bulunan açılara *iç açı* denir.

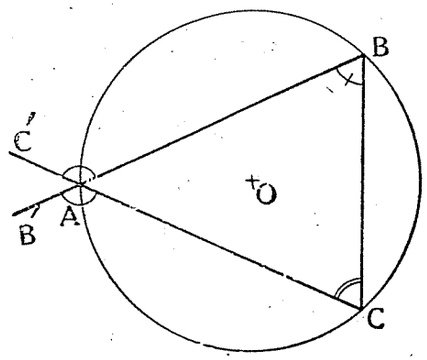
166. *Teorem. — Bir iç açı, kenarlarının ayırdığı yayları gören çevre açılarının toplamına eşittir.*

A açısının kenarları, çemberi B, B′ ve C, C′ noktalarında kessin (Şek 166).

B′C kirişini çizelim. BAC açısı AB′C üçgeninin bir dış açısıdır ve B′, C açılarının toplamına eşittir. Bu iki açı iç açının ayırdığı yayların karşısındaki çevre açıları olduklarından teorem ispatlanmış olur.



Şek. 166



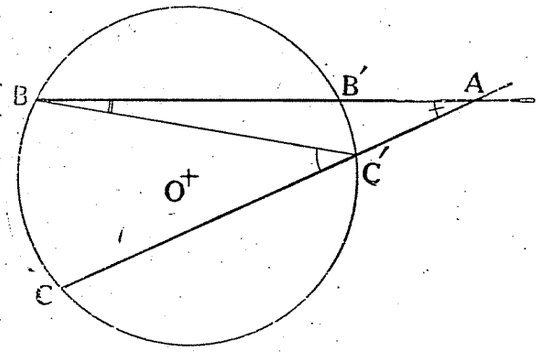
Şek. 167

İhtar. — Yukardaki teorem, A noktası çember üzerinde olsa da doğrudur (Şek. 167). BAC′ açısı B ve C çevre açılarının toplamına eşittir ki, bunlar da BA ve AC yaylarını ayırmaktadır ve bu yayların toplamı BAC yayıdır.

BAC′ açısı, BAC yayını ayıran merkez açısının yarısına eşittir. Ohalde teorem genelleştirilmiş oldu.

167. *Dış açı.* — Bir çemberin dış açısı, köşesi bu çemberin dışında bulunan açıdır.

168. *Teorem. — Bir dış açı, kenarlarının ayırdığı yayları gören çevre açılarının farkına eşittir*



Şek. 168

Dış açı A olsun; bu açının kenarlarının çemberi kestiği noktaları B, B′ ve C, C′ ile gösterelim (Şek. 168). Çemberin BC′ kirişini çizelim.

BC′C açısı ABC′ üçgeninin bir dış açısıdır. Ohalde,

$$\widehat{BC'C} = \widehat{B'BC'} + \widehat{BAC}$$

buradan da

$$\widehat{BAC} = \widehat{BC'C} - \widehat{B'BC'}$$

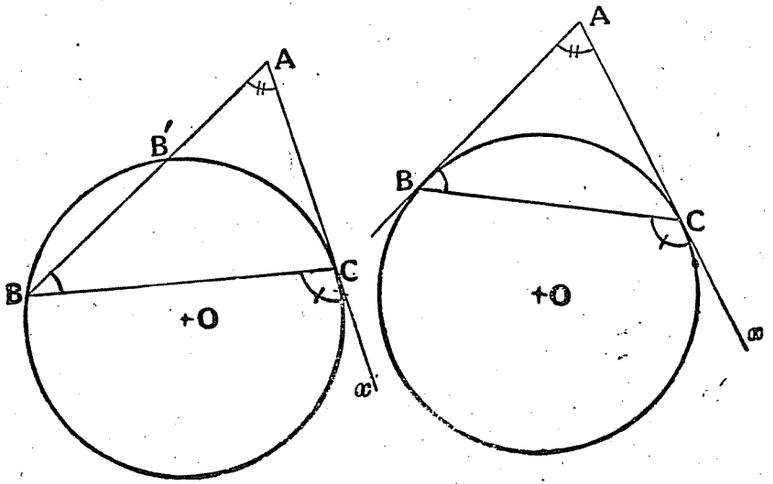
bulunur.

169. *Özel hal.* — Dış açının kenarlarından biri veya ikisi çembere teğetse teorem yine doğrudur.

Gerçekten, Şek. 169 da görüldüğü üzere

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCx} - \widehat{ABC}$$

dir.



Şek. 169

170. *Teorem. — Bir doğru parçasını aynı açı altında gören noktaların geometrik yeri, bu doğru parçasının iki ucunda nihayetlenen ve bu doğru parçasına göre simetrik olan iki çember yayıdır.*

Verilen açı x, geometrik yere ait bir nokta da M olsun (Şek. 170). $\widehat{AMB} = x$ dir. MAB üçgeninin çevrel çemberini çizelim. AMB yayının her noktası AB yi x açısı altında görür; bu yayı çembere tamamlayan yay üzerindeki noktalar ise aynı doğru parçasını

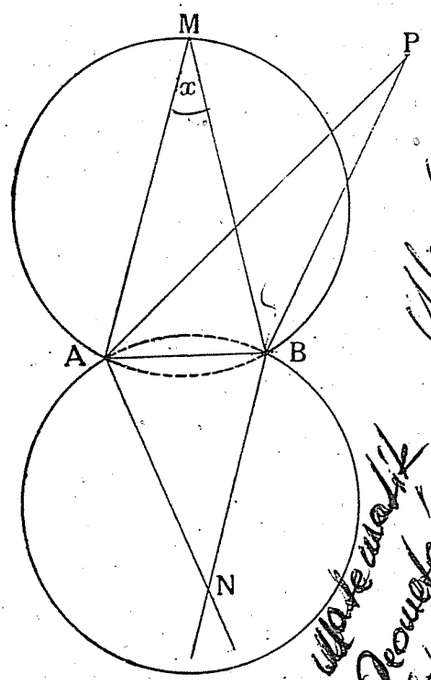
$$2^D - x$$

açısı altında görür. AMB yayının AB ye göre simetriği üzerindeki

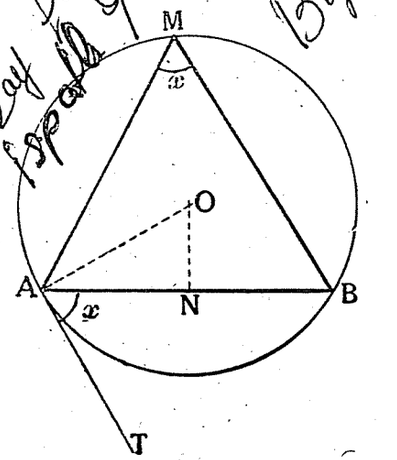
noktalar da AB yi x açısı altında görür. Ohalde AB ye göre simetrik olan bu iki yay üzerindeki bütün noktalar AB yi x açısı altında görür.

Şimdi gösterelim ki, bu iki yayın içinde ve dışındaki noktalar AB yi x açısı altında görmezler.

Gerçekten, bu iki yayın içindeki noktalar AB yi x açısından büyük açı altında, dışındaki noktalar da x açısından küçük açı altında görürler. Meselâ, Şek. 170 deki N noktası AB yi x açısından daha büyük, P noktası da x den daha küçük açı altında görür.



Şek. 170



Şek. 171

171. *Özel hal. — Bir doğru parçasını dik açı altında gören noktaların geometrik yeri, çapı bu doğru parçası olan çemberdir.*

No. 163, Sonuç II de bunu söylemiştik. Gerçekten burada her yay bir yarım çemberdir.

İhtar. — M noktası BA yayını çizerek A noktasına gelirse AMB açısı TAB teğet - kiriş açısı durumunu alır (Şek. 171). Buna dayanarak bir çizim yapalım :

172. *Çizim. — Verilen bir AB doğru parçasını bilinen bir x açısı altında gören yayı çizmek.*

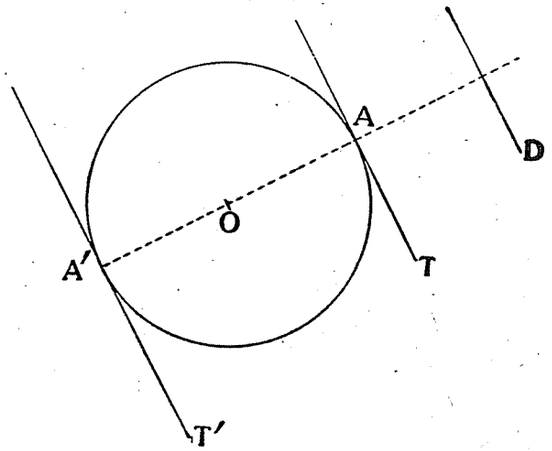
AB doğru parçası ile x açısı yapan AT doğrusu çizilir (Şek. 171). Bu AT doğrusu aranan yaya A noktasında teğettir (No. 164). Çember yayının O merkezi, A noktasından AT ye çizilen dikme ile AB nin orta dikmesi üzerinde bulunacağından bu iki dikmenin kesim noktası O dur. O noktası merkez, OA yarıçaplı çemberin, x açısının bulunmadığı taraftaki yayı çizilirse aranan geometrik yer elde edilmiş olur.

x açısı AB nin diğer tarafına alınırsa elde edilen yayın AB ye göre simetriği bulunmuş olur. Simetrik olan bu iki yay çizimin cevabıdır.

ÇEMBERLERİN TEĞETİNE AİT ÇİZİMLER

173. *Bir çembere verilen bir doğrultuda teğet çizmek. —*

Verilen çember O, doğrultu D olsun (Şek. 172).



Şek. 172

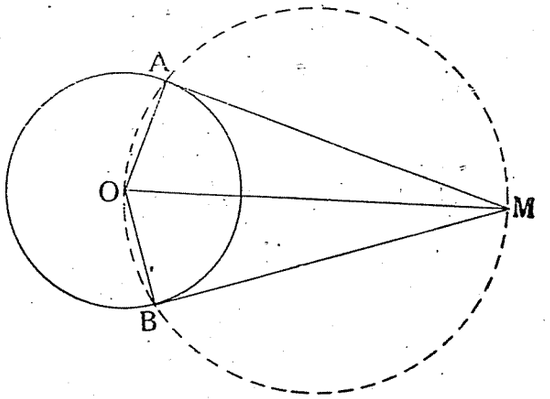
Çizeceğimiz teğet D ye paralel olacağından teğetin değme noktasından geçen yarıçap D ye diktir. Çemberin O merkezinden D doğrultusuna çizilen dikmenin çemberi kestiği noktalar teğetin değme noktalarıdır. Dikmenin çemberi kestiği A ve A′ noktalarından D ye çizilecek paraleller, aranan teğetlerdir.

Problemin daima iki çözümü vardır.

174. *Bir çemberin dışındaki bir noktadan çembere teğet çizmek. —*

Verilen çember O, nokta M olsun (Şek. 173).

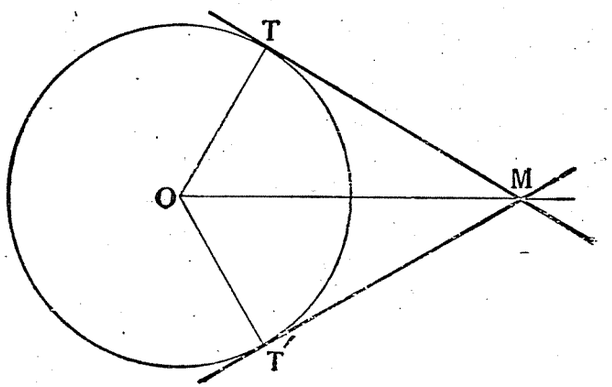
M noktasından O çemberine çizilecek teğetin değme noktası A ise OA, MA ya dik olacağından, A noktası OM yi dik açı altında görür.



Şek. 173

Ohalde OM yi dik açı altında gören noktaların geometrik yeri olan OM çaplı çemberin O çemberini kestiği A ve B noktaları teğetin değme noktalarıdır.

175. *Teorem. — Bir çemberin dışındaki bir noktadan bu çembere çizilen teğet uzunlukları eşittir.*



Şek. 174

Bir O çemberinin dışındaki M noktasından bu çembere MT, MT' teğetlerini çizelim (Şek. 174). Çemberin O merkezini T ve T' değme noktaları ile birleştirelim. MOT ve MOT' dik üçgenlerinin OM hipotenüsleri ortak, dik kenarlardan biri yarıçap olduklarından bu iki dik üçgen eşit olup

$$MT = MT'$$

dür.

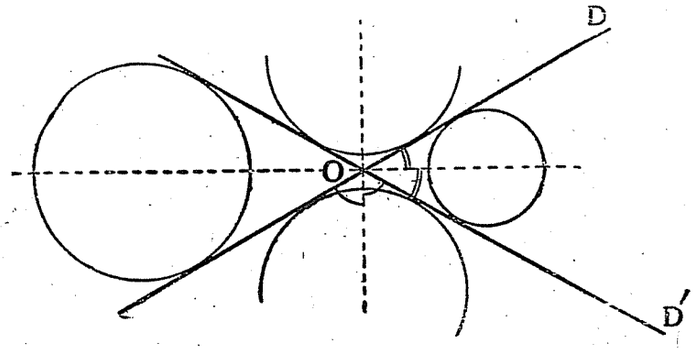
176. *Sonuç. — Bir çemberin aynı noktadan geçen iki teğeti arasındaki açıyı, bu noktayı merkeze birleştiren doğru ortalar.*

Şek. 174 deki MOT ve MOT' üçgenlerinin eşitliğinden

$$\widehat{OMT} = \widehat{OMT'}$$

bulunur.

177. *Geometrik yer. — Kesişen iki doğruya teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri, bu doğruların teşkil ettiği açıların açıortaylarıdır* (Şek. 175).



Şek. 175

İKİ ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU

178. *Tanımlar.* — Bir çemberin bütün noktaları diğer bir çemberin içinde ise ilk çembere ikincinin *içindedir* denir.

İki ortak noktası olan çemberlere *kesişen çemberler* denir.

Birbirinin içinde olmayan iki çemberin ortak noktası yoksa çemberlere *birbirinin dışında olan iki çember* denir.

Birbirinin dışında iki çemberin bir ortak noktaları varsa bu çemberlere *dıştan teğet çemberler* denir.

Çemberlerden biri diğerinin içinde olup bir ortak noktaları varsa bu çemberlere *içten teğet çemberler* denir.

Merkezleri O, O' ve yarıçapları R, R' olan iki çember alalım ve $R > R'$, $OO' = d$ farzedelim.

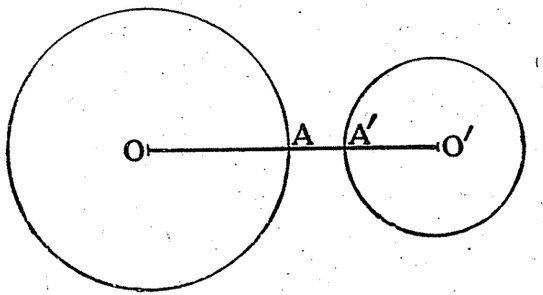
179. *Teorem. — İki çember :*

1°	*Birbirinin dışında ise*	$d > R + R'$	*dür,*
2°	*Dıştan teğetse*	$d = R + R'$	*dür,*
3°	*Kesişirlerse*	$R - R' < d < R + R'$	*dür,*
4°	*İçten teğetse*	$R - R' = d$	*dir,*
5°	*Biri diğerinin içinde ise*	$R - R' > d$	*dir.*

1° Çemberler birbirinin dışında olduğundan

$$OO' = OA + AA' + A'O'$$

dür (Şek. 176). İkinci taraftan AA' kaldırılacak olursa birinci taraf büyüyeceği için,



Şek. 176

$$OO' > OA + A'O'$$

veya

$$d > R + R'$$

bulunur

2° Çemberler A noktasında dıştan teğet olsun (Şek. 177).

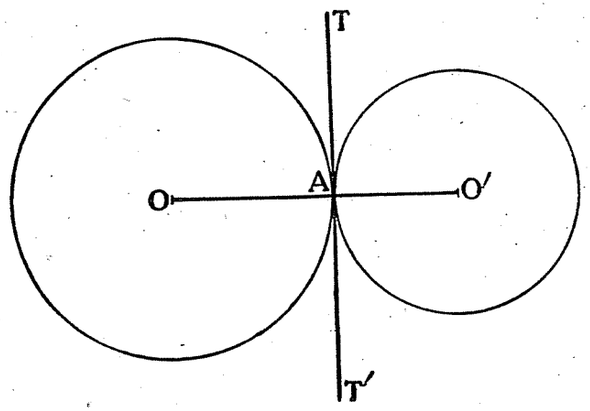
A noktası çemberin O ve O' merkezleri ile birleştirilirse, A noktasındaki ortak teğete hem OA ve hem de O'A dik olacağından bu iki doğru parçasının biri diğerinin uzantısındadır. Ohalde,

$$d = R + R'$$

bulunur.

$$OO' = OA + AO'$$

veya



Şek. 177

3° Çemberler A ve B noktalarında kesişsin (Şek. 178).

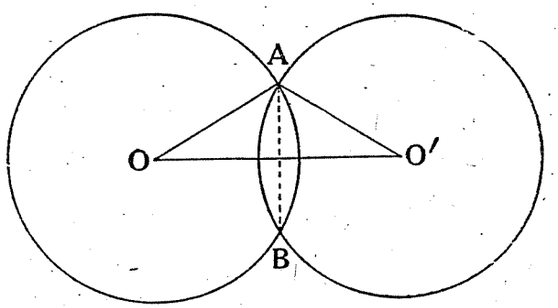
OO', AB nin orta dikmesidir. Yani A ve B noktaları OO' nün dışındadır. AOO' üçgeninde

$$AO - AO' < OO' < AO + AO'$$

veya

$$R - R' < d < R + R'$$

dür (No. 66).



Şek. 178

4° İki çemberin değme noktası A olsun (Şek. 179).

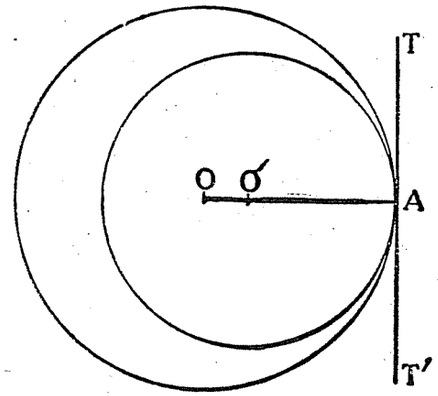
A noktası O ve O' merkezleri ile birleştirilirse, OA ve O'A ortak teğete dik olacaklarından çakışırlar; yani OO' doğrusu A dan geçer. Ohalde

$$OA - O'A = OO'$$

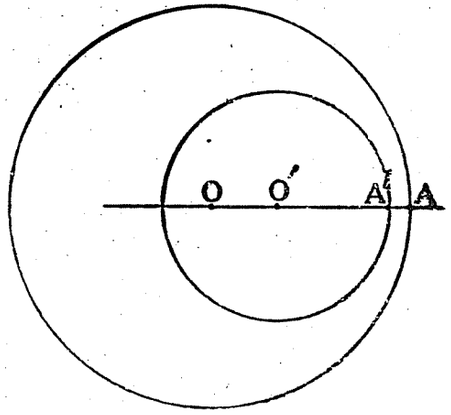
veya

$$R - R' = d$$

bulunur



Şek. 179



Şek. 180

5° O' çemberi O nun içinde olsun (Şek. 180).

OO' nün uzantısı O' çemberini A' ve O çemberini A da kessin,

$$OA - O'A' = OO' + AA'$$

dür. İkinci taraftan AA' kaldırılırsa, birinci taraf ikinci taraftan büyük olacağından

$$OA - O'A' > OO'$$

veya

$$R - R' > d$$

bulunur.

180. *Sonuç. — Teğet iki çemberin merkezler doğrusu değme noktasından geçer; karşıt olarak merkezler doğrusu üzerinde bir ortak noktaları olan iki çember birbirine teğettir.*

Bu sonucun ispatını No. 179, 2°, 4° de söyledik. Karşıtı da kısaca şöyle söylenir: Merkezler doğrusuna ortak noktadan çizilen dikme her iki çembere teğet olacağı için çemberler birbirine teğettir.

181. *Karşıt teorem. — İki çemberde :*

1° $d > R + R'$ *ise, çemberler birbirinin dışındadır,*
2° $d = R + R'$ » » *dıştan teğettir,*
3° $R - R' < d < R + R'$ » » *kesişirler,*
4° $R - R' = d$ » » *içten teğettir,*
5° $R - R' > d$ » *çemberlerden biri diğerinin içindedir.*

Bu karşıt teoremin ispatı olmayana ergi metodu ile yapılır. Birinciyi biz yapalım, diğerlerini öğrenciye bırakalım :

1° $d > R + R'$ ise, çemberler birbirinin dışındadır. Çünkü, bu çemberler birbirinin dışında olmasalar :

a) Dıştan teğet olurlar, bu takdirde $d = R + R'$ olması icabeder (No. 179, 2°).

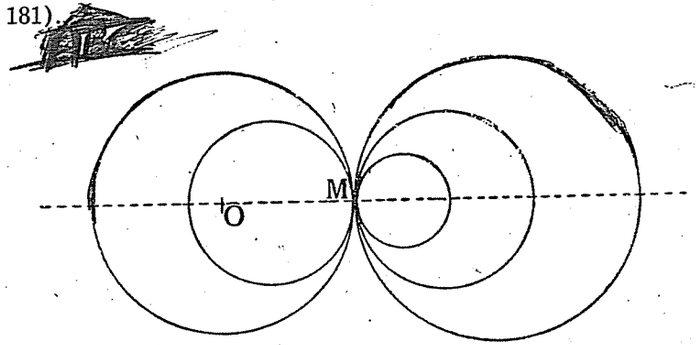
b) Kesişirler, bu halde $d < R + R'$ olmak gerekir (No. 179, 3°).

c) İçten teğet olurlar, bu takdirde $d = R - R'$ olması lâzımdır (No. 179, 4°).

ç) Biri diğerinin içindedir, bu halde $d < R - R'$ olmak lâzım Ohalde bu dört durumda bulunamayacağından birbirinin dışındadır.

182. *Sonuçlar I. — Verilen bir O çemberine bir M noktasında teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri OM doğrusudur.*

Bu sonuç yukarıdaki teorem ve karşıtı dolayısiyle aşikârdır (Şek. 181).



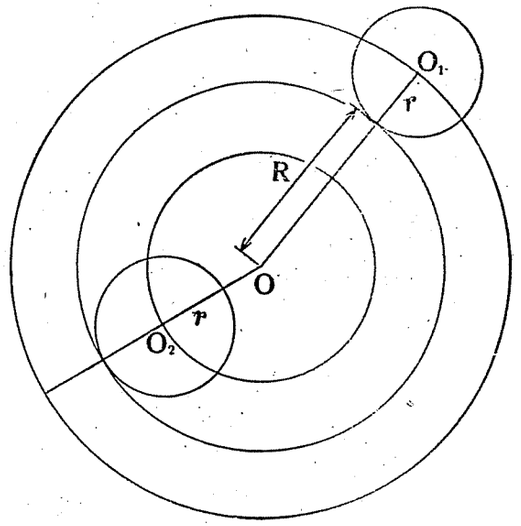
Şek. 181

II. — Verilen bir çembere teğet olan ve yarıçapları sabit kalan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri verilen çemberle aynı merkezli iki çemberdir.

Verilen çemberin yarıçapını R, sabit kalan yarıçapı r ile gösterelim. Çemberler dıştan teğet iseler $OO_1 = R + r$ olduğundan O_1 noktası, merkezi O ve yarıçapı

$$R + r$$

olan çemberi çizer (Şek. 182).



Şek. 182

Eğer çemberler içten teğet iseler $OO_2 = R - r$ $(R > r$ ise) veya $OO_2 = r - R$ $(R < r$ ise) dir. Ohalde O_2 noktası merkezi O ve yarıçapı

$$|R - r|$$

olan çemberi çizer. Şuhalde geometrik yer bu iki çemberden ibarettir.

$r < R$ ise, verilen çember, geometrik yer olan çemberlerin arasındadır.
$r = R$ ise, geometrik yer bir tek çemberdir.
$r > R$ ise, verilen çember, geometrik yeri teşkil eden çemberlerin içindedir.

183. *İki çemberin ortak dış teğetinin çizimi.* — İki çember O, O′ ve yarıçapları R, R′ $(R > R')$ olsun (Şek. 183).

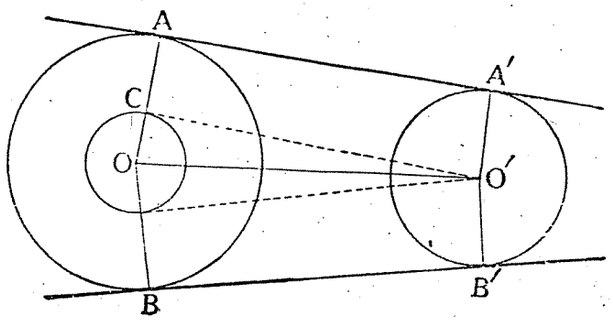
Probleme çözülmüş gözü ile bakalım; ortak teğetlerden biri AA′ olsun.

O′ noktasından AA′ ye çizilen paralelin OA yı kestiği nokta C olsun A′A ya dik olan OA ve O′A′ yarıçapları birbirine paraleldir.

Ohalde AA'O'C şekli bir dikdörtgen olup,

$$OC = OA - CA = OA - O'A' = R - R'$$

dür. Merkezi O ve yarıçapı $R - R'$ olan çember O'C ye C noktasında teğettir



Şek. 183

Çizim. — O merkez ve $R - R'$ yarıçap olmak üzere bir çember ve O' noktasından bu çembere bir teğet çizilir. C değme noktası ile O birleştirilip uzatılır; böylece A noktası elde edilmiş olur. A noktasından O'C ye çizilen paralel (veya OA ya çizilen dikme) aranan ortak teğettir.

Çemberler dıştan yani $OO' > R + R'$ ise, problemin iki çözümü vardır. Çizime cevap, OO' ye simetrik AA' ve BB' ortak teğetlerdir.

Çemberler kesişen ve dıştan teğetse, her iki halde de problemin iki çözümü, içten teğetse bir çözümü vardır.

184. *İki çemberin ortak iç teğetinin çizimi.* — Probleme çözülmüş gözü ile bakalım. Ortak iç teğetlerden biri AA' olsun (Şek. 184). O' noktasından AA' ye bir paralel çizelim ve OA nın bu paraleli kestiği nokta C olsun. AA'O'C şekli bir dikdörtgen olup,

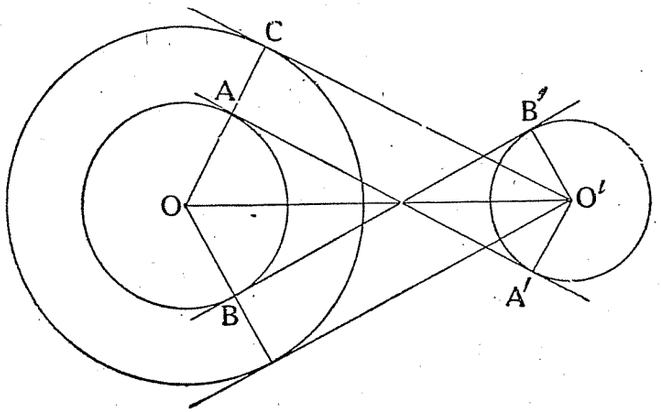
$$OC = OA + AC = OA + O'A' = R + R'$$

dür. Ohalde O'C, merkezi O ve yarıçapı $R + R'$ olan çembere teğettir.

Çizim. — Merkezi O ve yarıçapı $R + R'$ olan çember ve O' noktasından bu çembere O'C teğeti çizilir. C değme noktası ile O birleştirilir. OC nin O çemberini kestiği nokta A dır. A noktasından O'C ye çizilen paralel ortak teğettir.

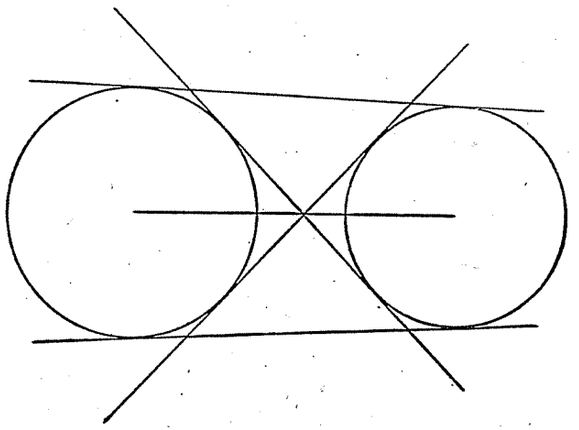
$OO' > R + R'$ ise, yani çemberler dıştan ise, problemin iki çözümü vardır, OO' ye göre birbirinin simetriği olan AA' ve BB' problemin cevabıdır.

$OO' = R + R'$ ise, yani çemberler dıştan teğetse, problemin tek çözümü vardır.

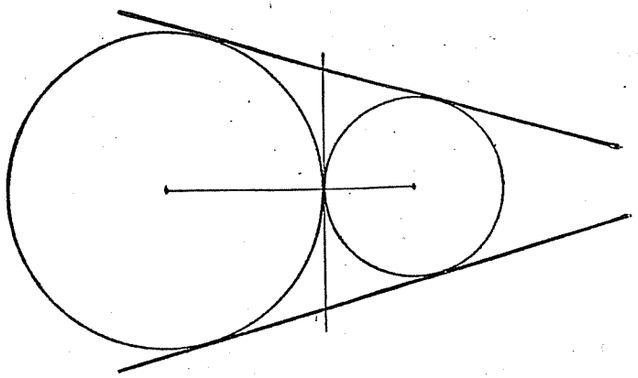


Şek. 184

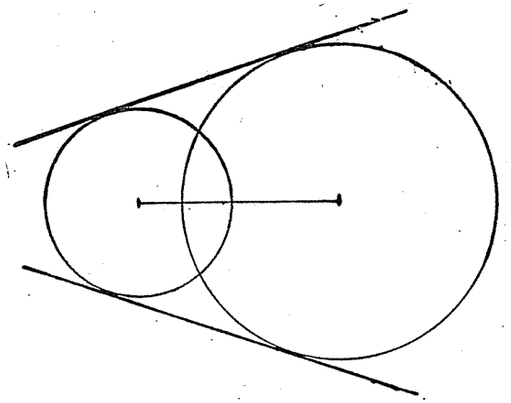
185. *Özet.* — Aşağıdaki şekiller iki çemberin ortak teğetinin çeşitli durumunu ve teğet sayısını gösterir (Şek. 185, 186, 187, 188) :



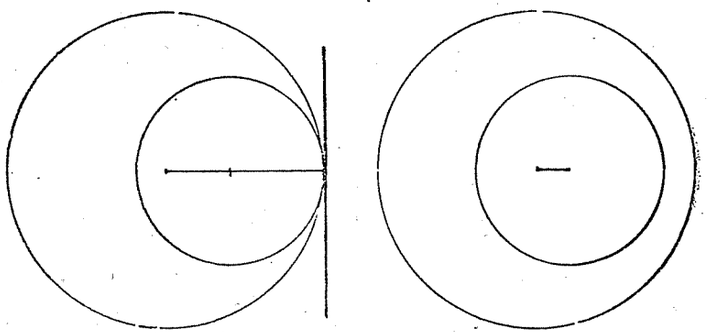
Şek. 185



Şek. 186



Şek. 187

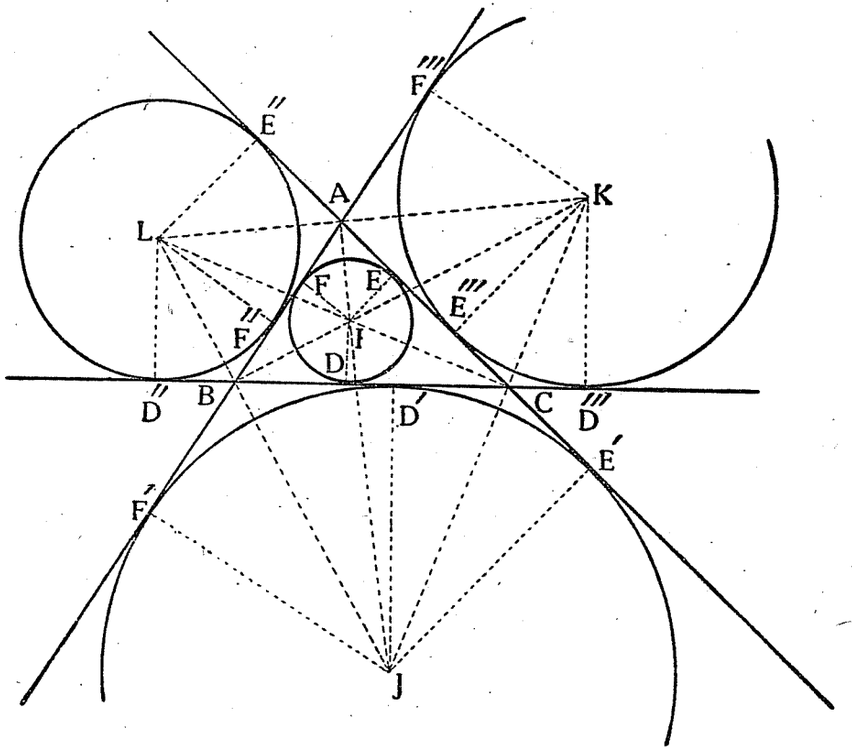


Şek. 188

186. *Bir üçgenin iç ve dış teğet çemberleri.* — Bir üçgenin içinde olup kenarlarına teğet olan çembere üçgenin *iç çemberi;* dışında olup bir kenar ile diğer kenarların uzantısına teğet olan çemberlere de üçgenin *dış çemberleri* denir.

Bu çemberlerin herbirinin merkezi üç kenara eşit uzaklıkta bulunan noktalardır.

Karşıt olarak, bu noktalardan I, üçgenin içindedir ve kenarlardan eşit uzaklıktadır. I noktasından kenarlara çizilen dikmeler ID, IE, IF



Şek. 189

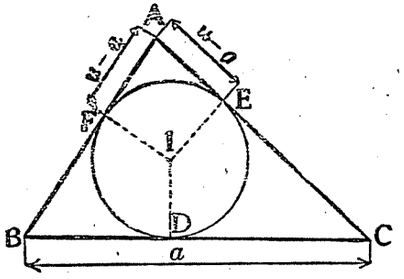
olsun (Şek. 189). ID = IE = IF olacağından merkezi I ve yarıçapı ID olan çember, kenarlara D, E, F noktalarında değer. Şuhalde iç çemberin merkezi, üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır. Yarıçap ise, bu noktadan kenarlardan birine indirilen dikmenin uzunluğudur.

J, K, L noktaları ise bir iç açının içinde ve diğer açıların dışındadır.

Meselâ A açısı içindeki J noktasını alalım: BC kenarına ve diğer kenarların uzantılarına JD', JE', JF' dikmelerini çizerek JD' = JE' = JF' bulunur.

D' noktası BC üzerine, E' ve F' ise AC ile AB nin uzantıları üzerine düşeceğinden merkezi J ve yarıçapı JD' olan çember, BC kenarına D' noktasında, AC ve AB nin uzantılarına E', F' noktalarında değer. Şuhalde:

Bir üçgenin bir açısının iç açıortayı ile diğer iki köşedeki dış açıortayların birleştikleri J, K, L noktalarından herbiri bir dış çemberin merkezidir.



Şek. 190

L çemberinin değme noktalarına D", E" F" ve K çemberinin değme noktalarına da D"', E"', F"' diyelim.

Bütün bu değme noktalarının kenarlar üzerindeki ayırdıkları parçalar, kenarlar cinsinden bulunabilir.

Üçgenin kenarlarını $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ve çevresini

$$a + b + c = 2u$$

olarak gösterelim.

$$AE = AF, \quad BD = BF, \quad CD = CE$$

olup

$$AE + BD + CD = AE + a = u$$

buradan da

$$AE = AF = u - a$$

aynı suretle

$$BD = BF = u - b, \quad CD = CE = u - c$$

bulunur (Şek. 190).

Dış çemberin ayırdığı parçalar için de (Şek. 191),

$$AE' = AF', \quad BD' = BF', \quad CD' = CE'$$

olup

$$AE' + AF' = (AC + CD') + (AB + BD') = AB + AC + BC = 2u$$

veya

$$AE' = AF' = u$$

bulunur. Aynı suretle

$$BD''' = BF''' = CD'' = CE'' = u$$

elde edilir (Şek. 189). Diğer elemanlar da

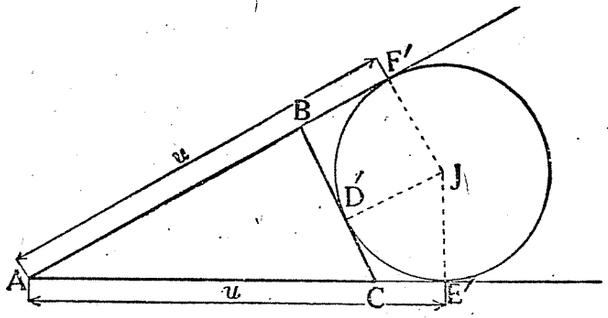
$$CD' = CE' = AE' - AC = u - b$$

$$BD' = BF' = AF' - AB = u - c$$

$$EE' = FF' = AE' - AE = u - (u - a) = a$$

bulunur; ohalde

$$BD = CD' = u - b \quad \text{ve} \quad BD'' = CD''' = u - a$$



Şek. 191

ve BC, DD', D"D"' nün orta noktaları aynı olup diğer taraftan

$$DD' = |b - c| \quad \text{ve} \quad D''D''' = b + c$$

dir.

KİRİŞLER VE TEĞETLER DÖRTGENİ VE BUNLARA AİT ÖZELLİKLER

187. *Tanımlar.* — Bir çokgenin bütün köşeleri aynı bir çemberin üzerinde ise bu çokgene, *çemberin içine çizilmiş çokgen* veya *kirişler çokgeni* denir.

Bir çokgenin bütün kenarları aynı bir çemberin teğetleri ise, bu çokgene, *çemberin dışına çizilmiş çokgen* veya *teğetler çokgeni* denir.

188. *Teorem. — Bir konveks kirişler dörtgeninde karşılıklı iki açının toplamı* 2^D *dır.*

ABCD içbükey kirişler dörtgeninde karşılıklı A ve C açılarını alalım.

A açısı BCD yayının karşısındaki merkez açının yarısına, C açısı da BAD yayının karşısındaki merkez açının yarısına eşittir (Şek. 192). Bu iki yay toplamı, çember olduğundan,

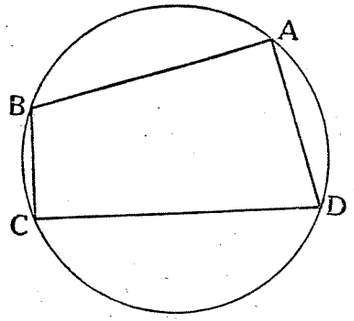
$$\widehat{A}+\widehat{C}=2^D$$

ve aynı suretle

$$B+D=2^D$$

elde edilir.

189. *Sonuçlar I.* — *Bir içbükey kirişler dörtgeninde karşılıklı iki açının toplamı diğer iki açının toplamına eşittir.*



Şek. 192

$$\widehat{A}+\widehat{C}=2^D \quad \text{ve} \quad \widehat{B}+\widehat{D}=2^D$$

olduğundan

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D} \qquad (1)$$

bulunur.

II. — Bir içbükey kirişler dörtgeninde komşu iki açının farkı, diğer iki açının farkına eşittir.

(1) eşitliğinden derhal

$$|\widehat{A}-\widehat{B}|=|\widehat{D}-\widehat{C}|\,, \quad |\widehat{A}-\widehat{D}|=|\widehat{B}-\widehat{C}|$$

bulunur.

İhtar. — Bir kirişler dörtgeni dışbükey olamaz; ancak yıldızıl olabilir. Bu takdirde ise karşılıklı açılar eşittir. Bunun incelenmesi programımızın dışındadır.

190. *Karşıt teorem.* — *Karşılıklı iki açının toplamı 2^D olan içbükey dörtgen, bir kirişler dörtgenidir.*

ABCD içbükey dörtgeninde, meselâ $\widehat{A}+\widehat{C}=2^D$ olsun (Şek. 192). B, A, D noktalarından geçen çemberi çizelim; bu çemberin C noktasından da geçtiğini gösterelim. Bir an için bu çemberin C noktasından geçmediğini farzedelim. C noktası bu çemberin ya içinde veya dışındadır. Çemberin içinde kalırsa $\widehat{A}+\widehat{C}>2^D$, dışında kalırsa $\widehat{A}+\widehat{C}<2^D$ olması icabeder. Her iki sonuç hipoteze aykırı olduğundan C noktası, çember üzerindedir. Ohalde ABCD dörtgeni bir kirişler dörtgenidir.

191. *Teorem.* — *Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı iki kenarın toplamı, diğer iki kenarın toplamına eşittir.*

ABCD teğetler dörtgenini alalım (Şek. 193). Değme noktaları M, N, P, Q olsun. Bir çembere çizilen teğet parçaları eşit olduğundan,

$$MA=AQ, \quad BM=BN, \quad CN=CP, \quad DP=DQ$$

veya

$$MA+BM=AB, \quad BN+NC=BC, \quad CP+PD=CD, \quad DQ+QA=AD$$

olduğundan

$$AB+CD=BC+AD$$

elde edilir.

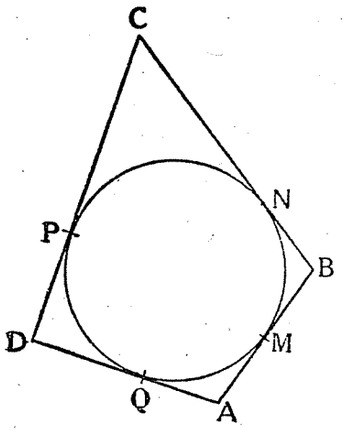
192. *Sonuç.* — *Bir içbükey teğetler dörtgeninde komşu iki kenarın farkı, diğer iki kenarın farkına eşittir.*

$$AB+CD=AD+BC$$

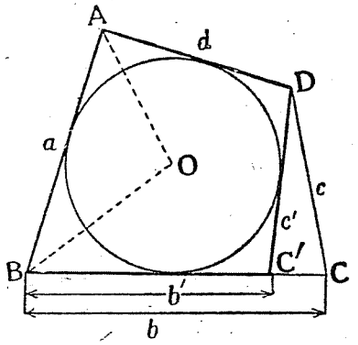
bağıntısından,

$$|AB-BC|=|AD-CD|\,, \quad |AB-AD|=|BC-CD|$$

bulunur.



Şek. 193



Şek. 194

193. *Karşıt teorem.* — *Karşılıklı iki kenarı toplamı diğer iki kenarın toplamına eşit olan içbükey dörtgen, bir teğetler dörtgenidir.*

ABCD içbükey dörtgeninde

$$a+c=b+d \qquad (1)$$

olsun (Şek. 194). A ve B açılarının açıortaylarının kesim noktası O ise bu nokta, AB, AD ve BC kenarlarından eşit uzaklıktadır. Bu nokta merkez, ortak uzaklık yarıçap olmak üzere çizilen çember, a, b, d kenarlarına teğet olur.

Bir an için bu çemberin c kenarına teğet olmadığını farzedelim ve çemberin c nin içinde kaldığını kabul edelim, D noktasından bu çembere çizilen c' teğeti BC kenarını C′ noktasında kessin, ADC′B dörtgeni bir teğetler dörtgeni olacağından ve

$$BC' = b'$$

dersek, esas teoremden dolayı

$$a + c' = b' + d$$

olması icabeder. Bu eşitliği (1) den çıkarırsak

$$c - c' = b - b'$$

bulunur. $b - b' = CC'$ olduğundan

$$c - c' = CC'$$

elde edilir. Bu ise DCC′ üçgeninde CC′ kenarının, diğer iki kenarın farkına eşit olduğunu gösterir. Bu sonuç mümkün olmadığından, çember içerde kalmaz (No. 60).

DC yi kesmiyeceği de aynı tazda ispatlanacağı için çember c kenarına teğet olur. Şuhalde ABCD dörtgeni bir teğetler dörtgenidir.

VII. ALIŞTIRMALAR

1. Bir O çemberi ile bu çemberin dışında bir P noktası alınıyor. Birinci çemberin yarıçapının iki katı yarıçapı olmak üzere aynı merkezli ikinci çember çiziliyor.

Bu ikinci çember, merkezi P ve yarıçapı PO olan çemberi C ve D noktalarında, OC ve OD de verilen çemberi A ve B noktalarında kesiyor. PA ve PB nin verilen çembere teğet olduğunu ispatlayınız.

2. 1° Bir O çemberinin l uzunluğundaki kirişlerinin orta noktalarının geometrik yerini bulunuz.

2° Bir P noktasından geçen l uzunluğundaki kirişi çiziniz.

3° MN nin orta noktası I olduğuna göre, I dan CD ye çizilen dikmenin sabit bir noktadan geçtiğini gösteriniz, A noktasını CD nin orta noktası farzederek, CD yi çiziniz.

3. Bir O çemberi ile sabit P noktası veriliyor. P den geçen değişen bir doğru çemberi A ve B noktalarında kesiyor:

1° AB nin M orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

2° $AB = l$ olduğuna göre PAB kesenini çiziniz.

(Nokta, çemberin içinde, üzerinde, dışında olduğuna göre üç hal düşününüz).

4. Bir ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde $BD = BA$ ve $CE = CA$ olmak üzere D ve E noktaları alınıyor:

1° ADE çemberinin O merkezi A açısının açıortayı üzerindedir.

2° O noktası ABC üçgeninin nesidir?

5. Bir O çemberinin içine çizilen ABC üçgeni veriliyor. B ve C açılarının iç açıortayları çemberi D ve E noktalarında, DE doğrusu AB ve AC yi F, G noktalarında kesiyor:

1° D ve E nin AB ve AC yaylarının orta noktası olduğunu gösteriniz.

2° AFG üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.

6. Bir O çemberinin içine çizilen ABC üçgeni veriliyor. A açısının iç açıortayı çemberi M noktasında kesiyor. M noktasının AB ve AC üzerindeki izdüşümleri D ve E ile gösteriliyor:

1° $BD = EC$ olduğunu gösteriniz.

2° $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$ olduğunu gösteriniz.

7. Bir O çemberinin AB çapı ile buna dik OC yarıçapı veriliyor. AB üzerindeki bir P noktası ile C yi birleştiren doğru çemberi D noktasında kesiyor. D noktasından çembere çizilen teğet AB yi E noktasında kesiyor:

1° EPD ve EDC açılarını karşılaştırınız.

2° $EP = ED$ olduğunu gösteriniz.

8. Bir ABC üçgeninin AA′, BB′, CC′ yükseklikleri çiziliyor. ABC üçgeninin yüksekliklerinin A′B′C′ üçgeninin açıortayları olduğunu ispatlayınız.

9. A ve B noktalarında kesişen O ve O′ çemberleri veriliyor. A noktasından geçen bir doğru çemberleri C ve D noktalarında kesmektedir:

CD doğrusu A noktası etrafında dönerse, BCD üçgeninin açılarının sabit kaldığını ve bu üçgenin B açısının OBO′ açısına eşit olduğunu gösteriniz.

10. Bir ABC üçgeni O çemberinin içine çizilmiştir. A, B, C açılarının iç açıortaylarının kesim noktası I olup O çemberini A′, B′, C′ noktalarında kesmektedir:

1° B′AI ve C′AI üçgenlerinin ikizkenar olduklarını ve B′C′ doğrusunun AI nın orta dikmesi olduğunu gösteriniz.

2° I noktası A'B'C' üçgeninin yüksekliklerinin kesim noktası olduğunu gösteriniz.

3° B'AC ve C'AA' açıları birbirinin tümleridir. İspat ediniz.

11. Bir ABC eşkenar üçgeni O çemberinin içine çizilmiştir. BC yayı üzerindeki bir nokta M olsun. MA üzerinde MD = MB alınıyor:

1° MBD üçgeninin eşkenar üçgen olduğunu,

2° BDA ve BMC üçgenlerinin eşit olduğunu,

3° MA = MB + MC olduğunu gösteriniz.

12. Aşağıdaki dik üçgenleri çiziniz (A = 90°):

1° a, h; 2° a+b, c; 3° a, b+c; 4° B, b+c;
5° a, b—c; 6° B, b—c; 7° a, r; 8° u, r.

13. Aşağıdaki ikizkenar üçgenleri çiziniz (Tepe A):

1° a, v_b; 2° h_a, v_c; 3° h_b, v_b.

14. Aşağıdaki üçgenleri çiziniz: (*)

1° c, A, v_a; 2° B, C, b—c; 3° B, C, R; 4° A, h_a, R;
5° A, v_a, R; 6° h_a, v_a, R; 7° a, h_b, R; 8° h_a, n_A, R;
9° A, b, r; 10° B, C, r; 11° A, h_a, r_a; 12° a, A, h_a;
13° b, B, v_b.

15. Yarıçapı verilen, sabit bir noktadan geçen ve
1° Verilen bir doğruya teğet olan,
2° Verilen bir çembere teğet olan çemberi çiziniz.

16. Yarıçapı verilen ve

1° Verilen iki doğruya teğet olan,
2° Verilen bir doğru ile verilen bir çembere teğet olan,
3° Verilen iki çembere teğet olan çemberi çiziniz.

17. Verilen iki çemberi öyle bir doğru ile kesiniz ki, bu doğrunun çemberler üzerinde ayırdığı kirişler l, l' uzunluğunda olsun.

18. A ve B noktalarından geçen ve

1° AB doğrusuna paralel bir doğruya teğet olan,

(*) R, üçgenin çevrel; r, iç teğet; r_a, r_b, r_c dış teğet çemberlerinin yarıçaplarıdır.

2° Merkezi AB nin orta dikmesi üzerinde olmak üzere verilen bir çembere teğet olan çemberi çiziniz.

19. R yarıçapı verildiğine göre aşağıdaki elemanları bilinen kirişler dörtgenlerini çiziniz (e, f köşegen uzunlukları);

1° a, b, f; 2° a, e, f; 3° a, e, C;
4° a, b, E (Köşegenler arasındaki açı); 5° a, A, E.

20. Aşağıdaki kirişler dörtgenlerini çiziniz:

1° a, b, f, B; 2° a, b, C, D; 3° c, b, e, A.

21. Her eşkenar dörtgenin bir teğetler dörtgeni olduğunu ispatlayınız.

22. İç çemberin r yarıçapı ile aşağıdaki elemanları verilen teğetler dörtgenlerini çiziniz:

1° a, b, B; 2° a, e, A; 3° A, B, C (Değme noktalarından geçen yarıçaplar arasındaki merkez açılardan faydalanınız).

23. Aşağıdaki teğetler dörtgenlerini çiziniz:

1° a, b, c, A; 2° a, A, B, C; 3° a—b, c, C, D (Evvelâ d yi çiziniz).

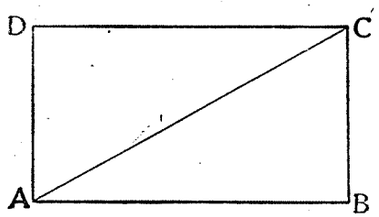
BÖLÜM VIII

§ 1. EŞDEĞERLİ ŞEKİLLER VE ALANLAR

194. *Tanım.* — Her şeklin çevresiyle sınırlanan parçasına, o şeklin ***alanı*** veya *yüzeyi* denir.

Alanları eşit olup da üst üste çakışmayan şekillere, *eşdeğerli şekiller* denir.

195. *Aksiyom.* — *Eşdeğerli şekillerin toplam veya farkları da eşdeğerlidir.*

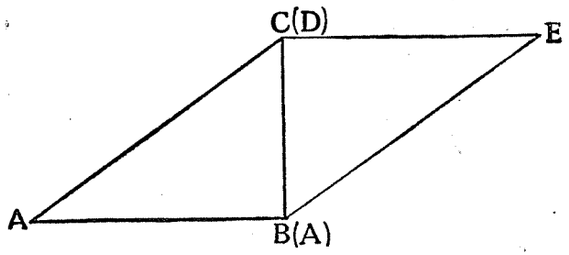


Şek. 195

Bir dikdörtgeni köşegeni yardımiyle iki üçgene böldükten sonra, bu üçgenleri öyle yanyana getiriniz ki :

1° Bir paralelkenar. 2° Bir ikizkenar üçgen meydana gelsin.

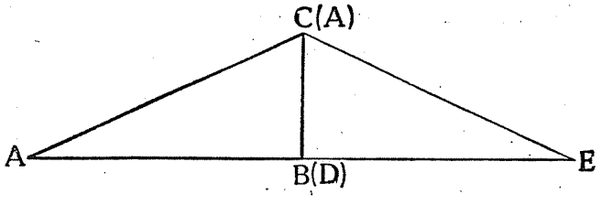
ABCD dikdörtgenini alalım (şek. 195) ve AC köşegenini çizelim. ABC, ACD dik üçgenleri eşittir. Bu iki üçgeni o suretle yanyana getirelim ki :



Şek. 196

1° *Şekil bir paralelkenar olsun.* ABC üçgenini aynen alalım. ADC üçgeninin A köşesi ABC üçgeninin B köşesine, D köşesi de ABC nin C köşesine gelmek üzere yerleştirelim (Şek. 196). Şekil bir paralelkenardır. Çünkü, ABEC dörtgeninin karşılıklı kenarları birbirine eşittir.

2° *Şekil ikizkenar bir üçgen olsun.* ABC üçgenini aynen çizelim. ACD üçgeninin A köşesi ABC üçgeninin C köşesine ve D köşesi de ABC nin B köşesine gelmek üzere yerleştirelim (Şek. 197). Şekil bir ikizkenar üçgendir. Çünkü, AC = CE dir.

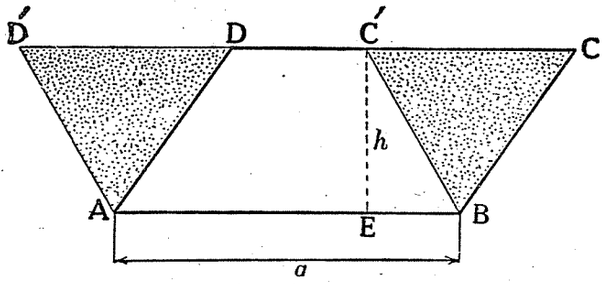


Şek. 197

Dikdörtgen, paralelkenar, ikizkenar üçgen eşdeğerlidir. Çünkü, iki dik üçgenin değişik durumda yanyana gelmesiyle elde edilmişlerdir.

196. *Teorem.* — *Tabanları ve yükseklikleri eşit olan paralelkenarlar eşdeğerlidir.*

Tabanları AB = a yükseklikleri C'E = h olan ABCD ve ABC'D' paralelkenarlarını alalım (Şek. 198). Noktalanan BCC' ve ADD' üçgenleri eşittir. Çünkü, BC = AD (ABCD paralelkenarının karşılıklı

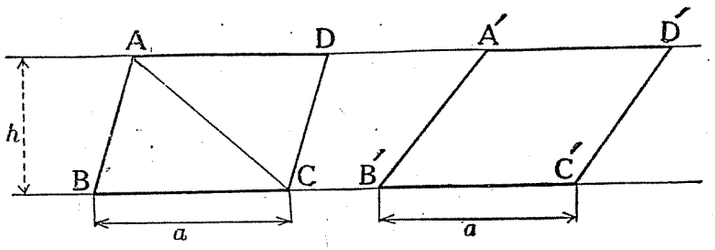


Şek. 198

kenarlarıdır). BC' = AD' (ABC'D' paralelkenarının karşılıklı kenarlarıdır). $\widehat{C'BC} = \widehat{D'AD}$ (kenarları paralel açılar) dır. Aynı alanlardan eşit iki alan çıkınca, geriye kalan alanlar da eşit olacağından ABCD' den iki eşit BCC' ve ADD' alanları çıkarılırsa ABC'D' ve ABCD paralelkenar alanları kalır ki teorem ispatlanmış olur.

197. *Teorem. — Bir üçgen, aynı taban ve yükseklikteki paralelkenarın yarısına eşdeğerlidir.*

Tabanı a, yüksekliği h olan ABC üçgeni ile tabanı a, yüksekliği h olan A'B'C'D' paralelkenarını alalım (Şek. 199). Üçgen alanının

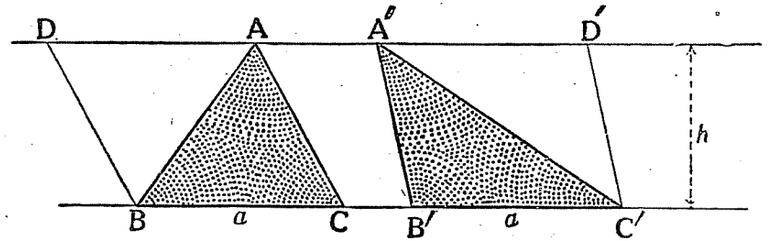


Şek. 199

paralelkenar alanının yarısına eşit olduğunu göstereceğiz. C noktasından AB ye CD paralelini çizelim ABCD paralelkenarı meydana gelir. ABC üçgeni ABCD paralelkenarının yarısıdır. Çünkü AC, paralelkenarın köşegenidir. ABCD paralelkenarı ile A'B'C'D' paralelkenarı taban ve yükseklikleri eşit olduğundan eşdeğerlidir. Ohalde ABC üçgeni de A'B'C'D' paralelkenarının yarısıdır.

198. *Teorem. — Taban ve yükseklikleri eşit olan üçgenler eşdeğerlidir.*

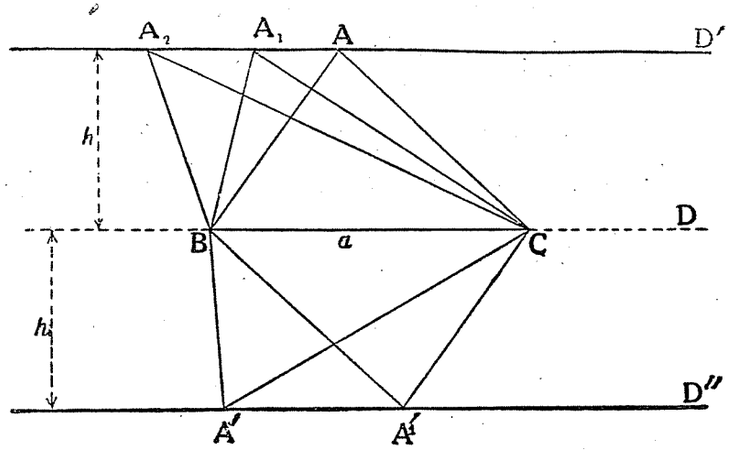
Tabanları a, yükseklikleri h olan ABC ve A'B'C' üçgenlerini paralelkenarlara tamamlarsak, ACBD ve A'D'C'B' paralelkenarları aynı taban ve aynı yükseklikte olduklarından eşdeğerli olup yarıları olan ABC ve A'B'C' üçgenleri de eşdeğerlidir (Şek. 200).



Şek. 200

199. *Sonuç. — Tabanları aynı doğru parçası olan eşdeğerli üçgenlerin tepelerinin geometrik yeri, tabandan h uzaklıktaki paralel çiftidir.*

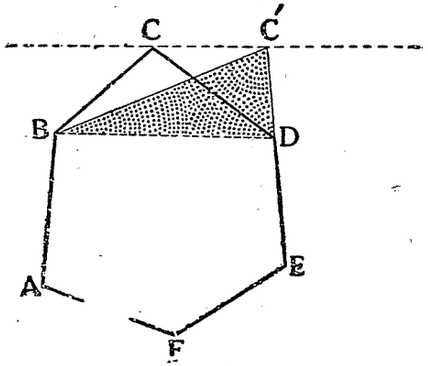
Tabanları $BC = a$ olan ABC, A'BC üçgenleri eşdeğerli olduklarından yükseklikleri de eşittir (Şek. 201). Ohalde A noktası D doğrusundan h uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir ki, bu da D den h uzaklığında bulunan paralel çiftidir (No. 89, II).



Şek. 201

200. *Temel problem. — Verilen bir çokgene eşdeğerli, kenarları sayısı verileninkinden bir eksik olan çokgen çizmek.*

ABCDEF ...n-genini, $(n-1)$-gene çevirelim. BD köşegenini ve C köşesinden de bu köşegene bir paralel çizelim (Şek. 202). ED nin uzantısının bu paraleli kestiği C' noktası ile B köşesi birleştirilirse meydana gelen BDC' ve BDC üçgenleri eşdeğerlidir. Çünkü, BD tabanları ortak ve yükseklikleri eşittir (No. 198). BCD üçgeni yerine ona eşdeğerli olan BC'D üçgeni alınırsa n-genin alanı değişmez, buna mukabil kenar sayısı bir eksilmiş olur.

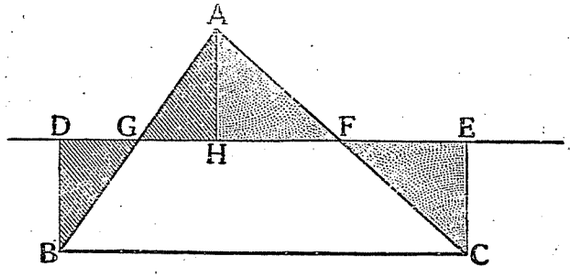


Şek. 202

İhtar. — Bu temel problem yardımiyle verilen herhangibir çokgen, kenarlar sayısı azaltılarak eşdeğerli bir üçgene çevrilebilir.

201. *Problem. — Verilen bir üçgene eşdeğerli dikdörtgen çizmek.*

ABC üçgenine eşdeğerli dikdörtgen çizmek için AB ve AC kenarlarının orta noktalarını birleştiren doğruya B ve C köşelerinden dikmeler indirilirse, meydana gelen BCED dikdörtgeni üçgenle eşdeğerlidir (Şek. 203). Çünkü, AGH üçgeni, BDG üçgenine ve AFH üçgeni EFC üçgenine eşittir.

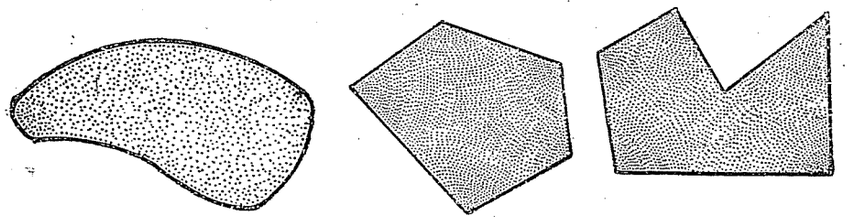


Şek. 203

§ 2. DÜZLEM ŞEKİLLERİN ALANLARININ HESABI

202. *Tanım.* — Çizgi veya çizgi parçaları ile sınırlanan düzlem parçalarına *alan* denir.

Bir şeklin alanı deyince bu şekli sınırlayan çizgilerin içinde kalan düzlem parçası anlaşılmalıdır (Şek. 204).



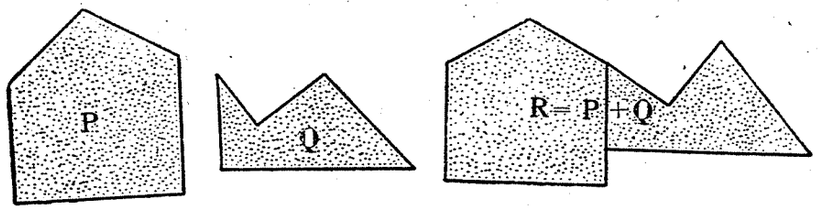
Şek. 204

203. *İki alanın toplamı.* — İki alanı toplamak için bu iki alanın sınır çizgileri doğru ise üst üste getirmek ve biri diğerinin dışında bulunmak üzere, yanyana koymak ve ortak sınır çizgisini kaldırmak kâfidir (Şek. 205).

İki alanı üst üste koyup ortak kısımlar kaldırılacak olursa, geriye kalan bu iki alanın farkı olur.

204. *Alan birimi.* — Kenarları birim uzunlukta alınan bir karenin alanına *alan birimi* denir.

Meselâ, uzunluk birimi bir metre seçilirse, alan birimi metrekare (m^2), desimetre seçilirse alan birimi desimetrekare (dm^2), santimetre seçilirse alan birimi santimetrekare (cm^2) dir [*].



Şek. 205

205. *Alanların ölçülmesi.* — Bir alanda bulunan birim alan sayısını bulmaya bu *alanın ölçülmesi* denir.

206. *Teorem. — Bir dikdörtgenin alanı tabanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.*

1° Taban ve yükseklik tamsayıdır. — Tabanı AB = 7 m ve yüksekliği AD = 4 m olan ABCD dikdörtgenini alalım (Şek. 206).

Bu dikdörtgen $7 \times 4 = 28$ birim kareye ayrılacağından, bu dikdörtgenin alanı

$$S = 7 \times 4 = 28 \text{ m}^2$$

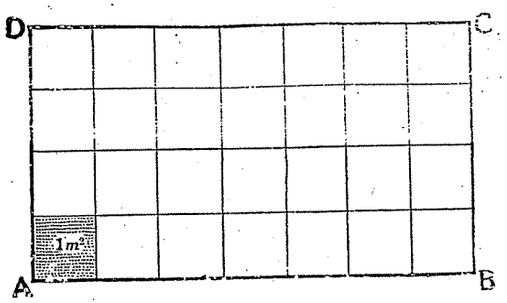
dir.

2° Taban ve yükseklik kesirdir. — Tabanı $AB = \frac{7}{3}$ m ve yüksekliği $AD = \frac{5}{4}$ m olan ABCD dikdörtgenini alalım (Şek. 207). Bu dik-

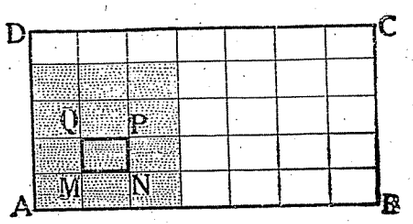
[*] Tatbikatta metre sistemini kullanmayan memleketler, alan birimi kendi uzunluk birimini kullanırlar.

Meselâ, uzunluk birimi ayak alınırsa alan birimi ayakkare
» » tuvaz » » » tuvazkare
» » yarda » » » yardakare
ilâh. kullanılır.

dörtgen, tabanı $\frac{1}{3}$ m, yüksekliği $\frac{1}{4}$ m olan MNPQ dikdörtgeninden $7 \times 5 = 35$ tanesini ihtiva etmektedir.



Şek. 206



Şek. 207

MNPQ dikdörtgeninden $3 \times 4 = 12$ tanesi, kenarı 1 m olan kareyi verir ki, MNPQ nün alanı $\frac{1}{12}$ m² olduğu görülür. Ohalde ABCD dikdörtgeninin alanı

$$S = \frac{1}{12} \text{ m}^2 \times 35 = \frac{35}{12} \text{ m}^2$$

veya

$$S = \frac{7}{3} \times \frac{5}{4} \text{ m}^2$$

dir.

Genel olarak taban a, yükseklik b ile gösterilerek

$$\boxed{S = a \cdot b}$$

elde edilir.

207. *Sonuç. — Bir karenin alanı, bir kenarının karesine eşittir.*

Kare, taban ve yüksekliği birbirine eşit bir dikdörtgen olduğundan $b = a$ yapılarak

$$\boxed{S = a^2}$$

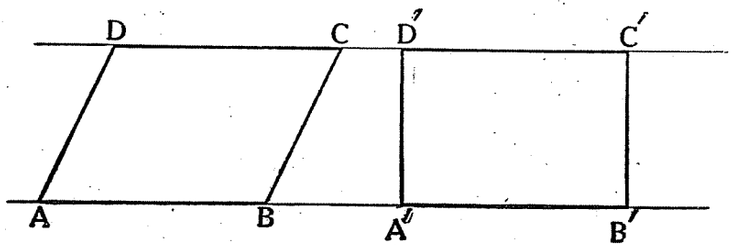
bulunur.

208. *Teorem. — Bir paralelkenarın alanı, tabanı ile yüksekliği çarpımına eşittir.*

ABCD paralelkenarının AB ve CD kenarlarını uzatarak AB uzantısında $A'B' = AB$ alalım (Şek. 208). A′ noktasından çıkılan dikmenin DC uzantısını kestiği nokta D′, B′ den çıkılan dikmenin kestiği nokta da C′ olsun. ABCD paralelkenarı ile A′B′C′D′ dikdörtgeni eşdeğerlidir (No. 196). Paralelkenarın ve dikdörtgenin taban ve yükseklikleri eşit olduğundan paralelkenarın S alanı, a taban, h yükseklik olmak üzere,

$$\boxed{S = a \cdot h}$$

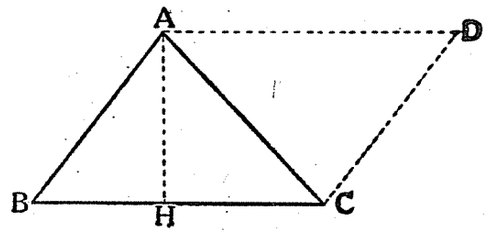
bulunur



Şek. 208

209. *Teorem. — Bir üçgenin alanı, tabanı ile yüksekliği çarpımının yarısına eşittir.*

ABC üçgeninin tabanı $BC = a$, yüksekliği h olsun (Şek. 209). A ve C köşelerinden karşı kenarlara birer paralel çizerek, bu üçgeni ABCD paralelkenarına tamamlayalım.



Şek. 209

ABC üçgeni ile ABCD paralelkenarının taban ve yükseklikleri eşit ve üçgen, paralelkenarın yarısı olduğundan,

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot h}$$

bulunur.

210. *Üçgen alanının kenarlar cinsinden hesabı.* —

1° $$S = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a$$

olup

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{u(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}$$

olduğundan [*], h_a değerini yerine koyarak

$$S = \frac{1}{2}\, a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{u(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}$$

$$S = \sqrt{u(u-a)\,(u-b)\,(u-c)}$$

elde edilir. Burada $2u = a+b+c$ dir.

2° Üçgen alanı, kenarlar ve yarıçaplar cinsinden de ifade edilebilir :

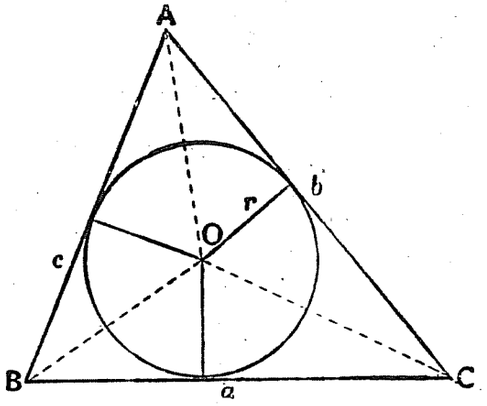
$$S = \text{BOC alanı} + \text{AOC alanı} + \text{AOB alanı}$$

$$S = \frac{1}{2}\, ar + \frac{1}{2}\, br + \frac{1}{2}\, cr$$

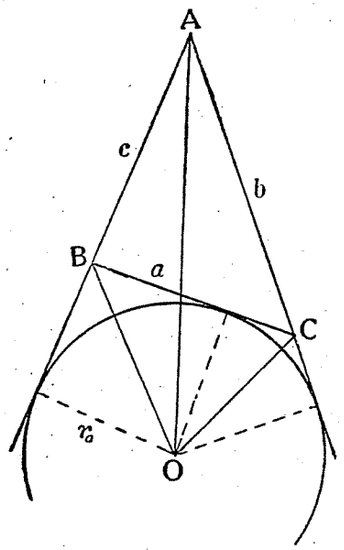
$$S = \frac{1}{2}\, r(a+b+c) = \frac{1}{2}\, r \cdot 2u$$

$$S = u \cdot r$$

elde edilir (Şek. 210).



Şek. 210



Şek. 211

3° $$S = \text{OAC alanı} + \text{OAB alanı} - \text{OBC alanı}$$

olup

[*] Bu formül ispatsız olarak verilmiştir. Geometri Dersleri Lise II, Fen Kolu No. 223.

$$S = \frac{1}{2}\, br_a + \frac{1}{2}\, cr_a - \frac{1}{2}\, ar_a$$

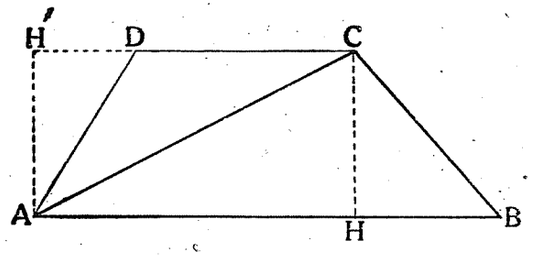
$$S = \frac{1}{2}\, r_a\,(b+c-a) = \frac{1}{2}\, r_a \cdot 2\,(u-a)$$

$$S = (u-a)\, r_a$$

bulunur (Şek. 211).

211. *Teorem. — Bir yamuğun alanı, tabanlar toplamının yüksekliği ile çarpımının yarısına eşittir.*

ABCD yamuğunun AC köşegenini çizelim (Şek. 212). ABC ve ACD üçgenlerinin alanları toplamı yamuğun alanına eşit olacağından,



Şek. 212

yamuğun alanı S, yüksekliği h ile gösterilerek

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} + \frac{CD \cdot h}{2} = \frac{h(AB+CD)}{2}$$

bulunur.

212. *Sonuç. — Bir eşkenar dörtgenin alanı, köşegenlerinin çarpımının yarısına eşittir.*

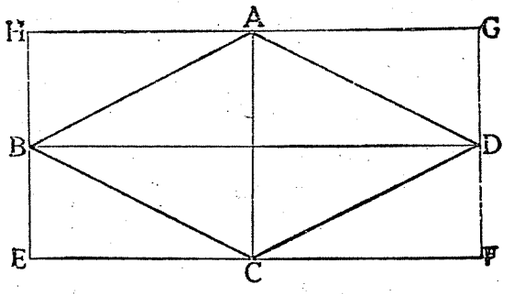
Köşelerden köşegenlere paralel doğrular çizilirse, elde edilen EFGH dikdörtgeninin alanı, $BD = f$, $AC = e$ alınarak

$$S = e \cdot f$$

olup, eşkenar dörtgen bunun yarısına eşit olduğundan

$$S = \frac{1}{2}\, ef$$

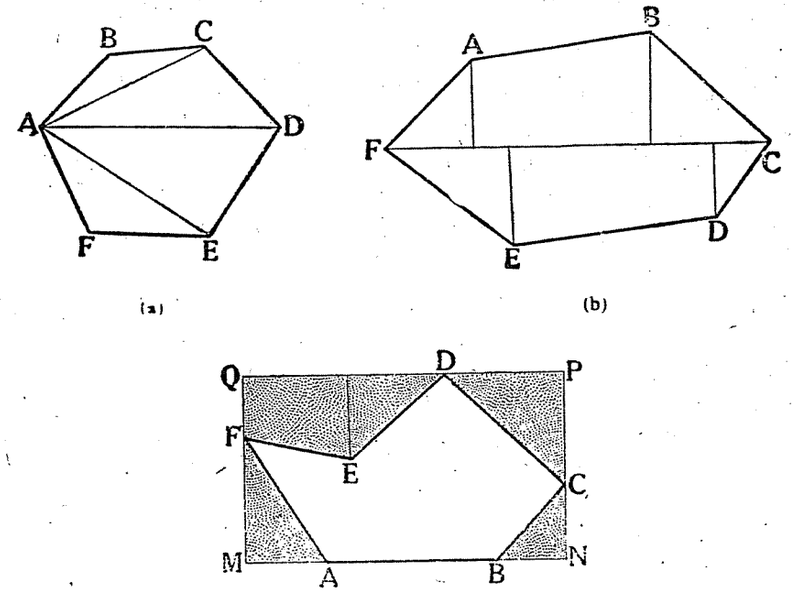
bulunur (Şek. 213).



Şek. 213

213. *Çokgen alanı.* — Bir çokgenin alanını bulmak için, bu çokgen uygun şekilde alanları bilinen şekillere ayrılıp toplama ve çıkarma yapılarak alan elde edilir. Meselâ, çeşitli şekilde bir altıgenin alanını arayalım (Şek. 214 *a*, *b*, *c*) :

(*a*) da üçgenlere ayırarak, (*b*) de üçgen ve yamuklara ayırarak, (*c*) de dikdörtgenden üçgen ve yamuklar çıkarılarak elde edilir.



Şek. 214

VIII. a. ALIŞTIRMALAR

1. ABCD paralelkenarını AB kenarı ve alanı sabit kalmak ve aşağıdaki şartlara uymak üzere eşdeğerli paralelkenarlara çeviriniz :

1° BC_1 kenarı verilen P noktasından geçsin.
2° $BC_1 = l$ uzunluğunda olsun.
3° Paralelkenar bir eşkenar dörtgen olsun.
4° Bir dikdörtgen olsun.
5° AC_1 köşegeni e_1 uzunluğunda olsun.
6° B den AD ye indirilen yükseklik h olsun.
7° $AC_1B = \alpha$ olsun.

2. Bir ABC üçgenini BC kenarı sabit kalmak ve aşağıdaki şartlara uymak üzere eşdeğerli üçgenlere çeviriniz :

1° BA_1 kenarı verilen P noktasından geçsin.
2° $BA_1 = l$ uzunluğundan olsun.
3° $BA_1 = CA_1$ olsun.
4° $\widehat{A_1BC} = \alpha$ olsun.
5° BC ye ait kenarortay v olsun.
6° CA_1 e ait kenarortay v olsun.
7° B den geçen yükseklik h olsun.
8° $\widehat{BA_1C} = \theta$ olsun.

3. Bir paralelkenara eşdeğerli :
1° Birer kenarları ortak,
2° Birer yüksekliği ortak bir üçgen çiziniz.

4. Bir üçgene eşdeğerli :
1° Birer kenarları ortak,
2° Birer yüksekliği ortak olan bir paralelkenar çiziniz.

5. Bir yamuğa eşdeğerli :
1° Yüksekliği yamukla ortak,
2° Tabanı yamuğun iki tabanı toplamına eşit bir dikdörtgen çiziniz.

6. Bir üçgene eşdeğerli :
1° Birer kenarları ortak,
2° Birer yüksekliği eşit bir dikdörtgen çiziniz. (Üçgeni yamuğun bir limiti farzediniz).

7. Bir ABC üçgeniyle eşdeğerli ve B açısı ortak olan öyle bir A_1BC_1 üçgeni çiziniz ki, $BA_1 = l$ uzunluğunda olsun.

8. Bir ABC üçgeniyle eşdeğerli olmak üzere B köşesini ve BC tabanının doğrultusunu değiştirmeden, A köşesini şekil düzleminin verilen bir noktası yapınız.

9. Verilen altıgene eşdeğerli bir üçgen çiziniz.

10. Verilen bir beşgenle eşdeğerli olan bir dikdörtgen çiziniz.

11. Verilen bir paralelkenarı, bir kenarına paralel çizerek n tane eşdeğerli parçaya bölünüz.

12. Verilen bir üçgeni bir köşesinden geçen doğrular yardımiyle n tane eşdeğerli parçaya bölünüz.

§ 3. π (Pİ) SAYISI VE DAİRENİN ÇEVRESİ

214. *Bir daire çevresinin 2R çapına oranı 3,14159... gibi bir sayı verir. Bu sayı π ile gösterilir* [*].

π nin gerçek değeri araştırılırken virgülden sonra 707 rakam hesaplanmıştır. π nin kesir olarak yaklaşık değeri $\frac{22}{7}$ veya daha yakın olarak $\frac{355}{113}$ dür. Genellikle hesaplarda $\frac{22}{7}$ veya 3,1416 olarak kullanılır. Ohalde :

215. *Teorem. — Yarıçapı R olan bir çemberin uzunluğu*

$$m = 2R \cdot \pi$$

dir.

216. *Sonuç.* — Yarıçapı R olan daire çevresi $2\pi R$ olduğuna göre 1° lik bir yay uzunluğu $\frac{2\pi R}{360}$ ve 1 dakikalık bir yayın uzunluğu $\frac{2\pi R}{360 \cdot 60}$ ve 1 saniyelik bir yayın uzunluğu $\frac{2\pi R}{360 \cdot 60 \cdot 60}$ dir. α derecelik bir yayın uzunluğunu μ ile gösterirsek

$$\mu = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$$

elde edilir. Burada α tam derece değilse, derecenin kesri olarak yazılmalıdır.

§ 4. DAİRENİN ALANI

217. *Teorem. — Bir daire alanı bu dairenin içine ve dışına çizilen düzgün çokgenlerin kenar sayıları sonsuza uzandığı zamanki alanlarının limitidir.*

Yarıçapı R olan bir daire ile içine ve dışına çizilen düzgün n-genleri gözönüne alalım. Daire alanını S, dairenin içine çizilen düzgün n-genin alanını S_n, dışına çizileninkini S_n' ile gösterirsek

$$S_n < S < S_n'$$

dür. İki çokgenin çevrelerini m_n, M_n ile gösterdiğimize göre

$$S_n = \frac{1}{2} m_n \cdot r_n , \qquad S_n' = \frac{1}{2} M_n \cdot R$$

dir. Burada $r_n = OH$ dır (Şek. 215).

[*] π sayısının tam veya kesir değeri uzun müddet matematikçiler tarafından aranmış, nihayet 1882 yılında Lindemann bunun imkânsız olduğunu ispat etmiştir. Şuhalde π sayısı ne bir kesir, ne de köklü bir ifadedir.

n sonsuza uzanırsa m_n ve M_n nin limitleri $2\pi R$ olacağından S_n ve S_n' de aynı limite uzanır.

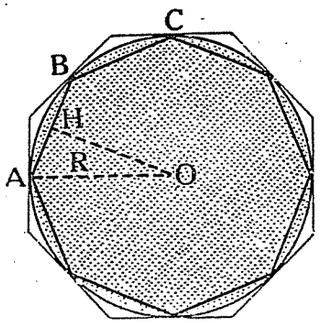
Şuhalde dairenin alanı kenar sayısının çoğalmasiyle

$$S_n = S_n' = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R$$

yani

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

elde edilir.



Şek. 215

İhtar. — Daireler, düzgün çokgenlerin limitleri olduğuna göre bütün daireler birbirinin benzeridir.

218. *Teorem. — İki dairenin alanlarının oranı, yarıçaplarının karelerinin oranına eşittir.*

Yarıçapları R ve R′ olan iki dairenin alanları S ve S′ olsun.

$$S = \pi R^2 , \qquad S' = \pi R'^2$$

dir; taraf tarafa bölersek :

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}$$

elde edilir.

219. *Tanım. — Aynı merkezli iki dairenin arasında kalan düzlem* parçasına *daire halkası* denir.

220. *Daire halkasının alanı.* — İki dairenin yarıçapları R ve r ise, alanları πR^2 ve πr^2 olacağından, halkanın alanı

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \qquad (1)$$

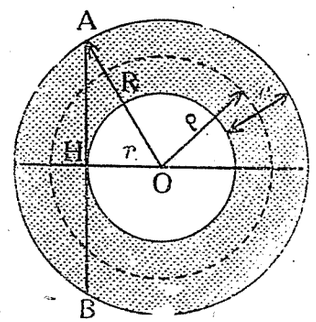
dir.

(1) formülünü,

$$S = \pi(R + r)(R - r)$$

şeklinde yazarak ve

$$\rho = \frac{R + r}{2} , \quad e = R - r$$



Şek. 216

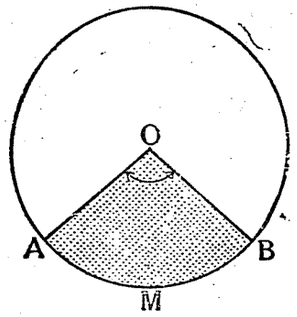
dersek

$$S = 2\rho\pi\epsilon$$

elde edilir (Şek. 216). Ohalde

Halkanın alanı, iç ve dış dairelerin ortalama çevresi ile halka genişliğinin çarpımına eşittir.

221. *Daire kesmesi.* — Bir dairenin iki yarıçapı arasında kalan kısmına *daire kesmesi* (veya kısaca *kesme*) denir (Şek. 217).



Şek. 217

Bu kesme, bir merkez açı ve bu açının daire üzerinde ayırdığı yay ile sınırlanmıştır. Bu yaya, kesmenin *tabanı* denir.

Aynı bir daireye veya eşit dairelere ait ve merkez açıları eşit olan iki daire kesmesinin birbirine eşit olduğu aşikârdır.

Aynı bir daire üzerinde 1 gradlık daire kesmeleri birbirine eşit; 1 derecelik kesmeler de birbirine eşittir.

360° lik merkez açının karşısındaki alan πR^2 dir; 1° lik merkez açısının ise, $\frac{\pi R^2}{360}$ dır. α derecelik merkez açıya ait daire kesmesinin alanı ise,

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

dan ibarettir. Bu formülü,

$$S = \frac{\pi R \alpha}{180} \cdot \frac{R}{2} \qquad (1)$$

şelkinde yazalım. Diğer taraftan, 360° lik merkez açının karşısındaki yay uzunluğu, $2\pi R$; α derecenin ise,

$$\mu = \frac{2\pi R \alpha}{360} = \frac{\pi R \alpha}{180} \qquad (2)$$

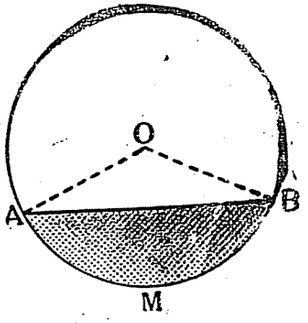
dir.

(1) ve (2) bağıntılarını karşılaştırırsak, daire kesmesinin alanı,

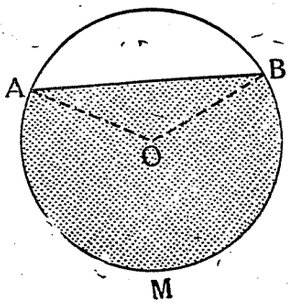
$$S = \frac{\mu \cdot R}{2}$$

olarak elde edilir. Burada μ, daire kesmesinin tabanının uzunluğudur.

222. *Daire parçası.* — Bir daire yayı ile kirişi arasında kalan düzlem parçasına *daire parçası* denir (Şek. 218 - 219).



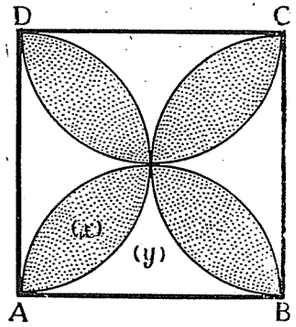
Şek. 218



Şek. 219

Bu daire parçasının alanı, kolayca görüleceği üzere OAMB daire kesmesiyle OAB üçgeninin fark (Şek. 218) veya toplamından (Şek. 219) ibarettir.

223. *Uygulama.* — Kenarı $2a$ olan bir karenin kenarları çap olmak üzere kare içine yarım daireler çiziliyor (Şek. 220). Taranmış ve taranmamış alanların hesabı.



Şek. 220

Taranmış kısımlardan bir parçanın alanını x ; taranmamış kısmı da y ile gösterirsek, aşağıdaki sistem kolayca teşkil edilir :

$$4x + 4y = 4a^2$$

$$2x + y = \frac{\pi a^2}{2}$$

Bu sistemi çözersek,

$$x = \frac{a^2}{2}(\pi - 2)$$

$$y = \frac{a^2}{2}(4 - \pi)$$

elde edilir.

VIII. b. ALIŞTIRMALAR

1. Çevresi $\frac{1100}{7}$ m olan bir çemberin çapı ne kadardır?

2. Yarıçapı 4 cm olan bir çemberde 3°, 24°, 45° 106° lik merkez açılarının yayları ne kadardır ve bu açıların teşkil ettikleri dayire kesmelerinin alanlarını hesaplayınız?

3. Yarıçapı R olan bir çember üzerindeki bir η yayının merkez açısı ne büyüklüktedir?

Uygulama: 1° $R = 7$ cm $\quad \eta = 10$ cm
2° $R = 14$ cm $\quad \eta = 16$ cm
3° $R = \eta$.

4. Yarıçapı $R = 14$ cm ve merkez açıları 6°, 28°, 54°, 112° olan daire kesmelerinin alanlarını hesaplayınız.

5. Alanı daire yarıçapının karesine eşit bir daire kesmesinin merkez açısını ve bu açıya karşılık yayı hesaplayınız.

6. Yarıçapı 21 cm olan bir çember içine çizilen düzgün altıgenin bir kenarı AB olduğuna göre AB yayını hesaplayınız. $\pi = \frac{22}{7}$

7. Yarıçapı R olan ve α merkez açısının karşısındaki yayı ve daire kesmesinin alanını aşağıdaki değerlere göre hesap ediniz:

1° $R = 125$; $\quad \alpha = 152°$
2° $R = 120$; $\quad \alpha = 78° 32'$
3° $R = 75$; $\quad \alpha = 178°$
4° $R = 86$; $\quad \alpha = 62°$.

8. $\alpha = 18° 30'$ lık bir merkez açısının karşısındaki yay 2 m uzunlukta olduğuna göre, çemberin yarıçapını hesaplayınız.

9. Aynı problemi aşağıdaki değerler için çözünüz:

1° $\alpha = 23° 45'$ $\quad \eta = 4{,}5$ m
2° $\alpha = 42° 36'$ $\quad \eta = 72$ m
3° $\alpha = 82° 10'$ $\quad \eta = 108$ m.

10. Eğer iki çember, aynı üçüncü bir çembere içten teğet ve yarıçapların toplamı da üçüncü çemberin yarıçapına eşit ise; bu sonuncu çemberin iki değme noktası A, B ve iç çemberlerin kesim noktalarından üçüncü çembere yakın olanı C olduğuna göre,

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$$

olduğunu gösteriniz.

11. Bir ABC üçgeninde $\overset{\frown}{B} = 30°$ ve $\overset{\frown}{C} = 45°$ dir. B merkezli $BA = R$ yarıçaplı dayirenin alanının, C merkezli CA yarıçaplı dayirenın alanından iki kat büyük olduğunu ispatlayınız.

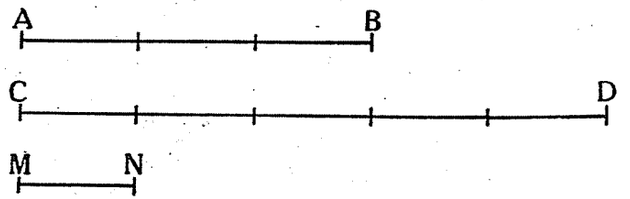
BÖLÜM IX

GEOMETRİK UZUNLUKLARDA ORAN VE ORANTI

224. *İki doğru parçasının oranı.* — Bir AB doğru parçası MN gibi başka bir doğru parçasının 3 katı; CD doğru parçası aynı MN doğru parçasının 5 katı ise bu doğru parçalarının oranı 3/5 dir. Yani, $MN = a$ alalım, $AB = 3a$, $CD = 5a$ olacağından

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$$

olur (Şek. 221).



Şek. 221

TALES TEOREMLERİ [*]

225. *Teorem I. — Paralel doğrular, herhangi iki kesen üzerinde, sırasiyle orantılı parçalar ayırırlar.*

Δ, Δ' kesenleri a, b, c, d paralellerini A, B, C, D,... ve A′, B′, C′ D′,... noktalarında kessin (Şek. 222). İspatlayalım ki

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

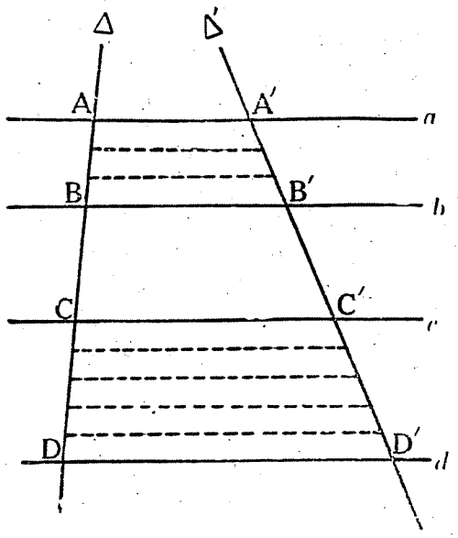
dür.

1 inci hal. — Farzedelim ki AB ve CD doğru parçaları ortak ölçeklidir. Meselâ ortak ölçek α ve AB de α, m defa; CD de α, n defa dahil olsun. Bu iki doğru parçasının oranı

[*] Thales, M. Ö. 640 - 547.

$$\frac{AB}{CD}=\frac{m\alpha}{n\alpha}=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

olacaktır. AB ve CD nin bölüm noktalarından AA′ ye paraleller çizersek, A′B′ de birbirine eşit m doğru parçası, C′D′ de n doğru parçası olacaktır (No. 123). Şuhalde



Şek. 222

$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{m}{n} \qquad (2)$$

olup (1) ve (2) bağıntılarından

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

elde edilir.

2 nci hal. — Farzedelim ki AB ve CD doğru parçaları ortak ölçekli olmasın. CD de n defa dahil olan α yı birim olarak seçelim. Bu takdirde

$$CD=n\alpha$$

dır. Diğer taraftan farzedelim ki AB de α, m den fazla ve fakat $m+1$ den eksik dahil olsun. Şuhalde

$$m\alpha < AB < (m+1)\alpha$$

yazılabilir. Bu çift eşitsizliğin iki tarafı $n\alpha = CD$ ile bölünürse

$$\frac{m\alpha}{n\alpha}<\frac{AB}{CD}<\frac{(m+1)\alpha}{n\alpha}$$

veya

$$\frac{m}{n}<\frac{AB}{CD}<\frac{m+1}{n} \qquad (1)$$

bulunur. Bölüm noktalarından AA′ ye paraleller çizilecek olursa, aynı suretle

$$\frac{m}{n}<\frac{A'B'}{C'D'}<\frac{m+1}{n} \qquad (2)$$

elde edilir. Görülüyor ki

$$\frac{AB}{CD} \quad \text{ve} \quad \frac{A'B'}{C'D'}$$

oranları

$$\frac{m}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{m+1}{n}$$

oranlarının arasında bulunuyor. Bu sebeple bu iki oranın farkı

$$\frac{1}{n}$$

den küçüktür. n, devamlı bir surette arttırıldığında $1/n$ nin limiti sıfır olacağından, bu iki oranın arasındaki fark da sıfır olur. Çünkü bu fark sıfıra istenildiği kadar yakın olan $1/n$ gibi bir sayıdan daha küçüktür. Ohalde

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

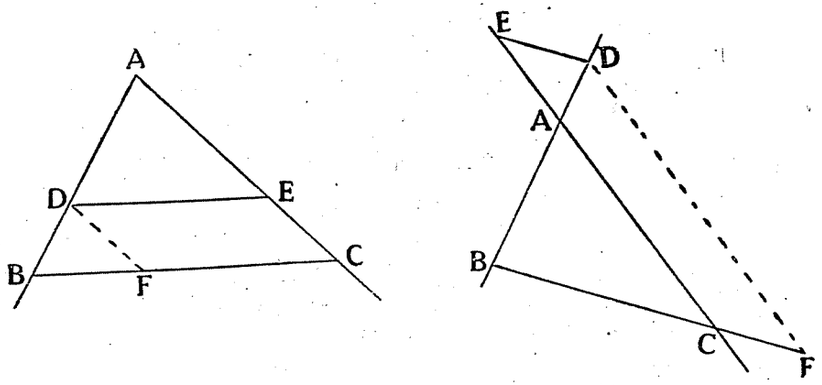
elde edilir.

226. *Teorem II. — Bir açının iki kenarı arasında kalan paralel doğru parçalarının birbirine oranı, bir kenar üzerinde açı köşesinden paralellerin kesim noktasına kadar olan uzaklıkların oranına eşittir*

Bir A açısının kenarları arasında kalan paralel doğru parçaları BC, DE olsun (Şek. 223 *a*, *b*). İspatlayalım ki

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

dir.



Şek. 223

DE ve BC paralelleri AB, AC doğruları tarafından kesilmiştir. Tales I den dolayı

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \qquad (1)$$

dir.

D noktasından AC ye DF paralelini çizelim. Buradan

$$\frac{BC}{FC}=\frac{BA}{DA} \qquad (2)$$

bulunur.

DECF dörtgeni paralelkenar olduğundan $FC=DE$ dir. (2) bağıntısında yerine koyarak

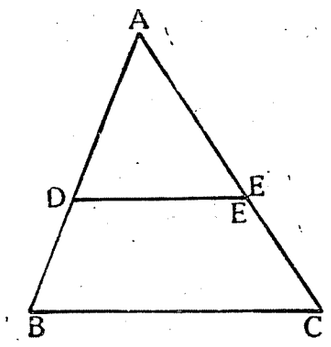
$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$$

çıkar. (1) ile karşılaştırılarak,

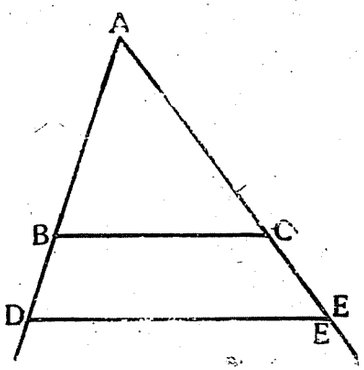
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$ elde edilir.

TALES TEOREMİNİN ÜÇGEN VE YAMUĞA UYGULANMASI

227. *Teorem. — Bir üçgenin bir kenarına çizilen paralel doğru, diğer iki kenarı orantılı olarak böler.*



Şek. 224



Şek. 225

Bir ABC üçgeninin AB kenarı üzerinde aldığımız bir D noktasından BC kenarına DE paralelini çizelim (Şek. 224 - 225 - 226).

Tales teoreminden dolayı

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}$$ elde edilir.

228 *Karşıt teorem. — Bir doğru bir üçgenin iki kenarı üzerinde*

orantılı parçalar ayırırsa, bu doğru üçgenin üçüncü kenarına paraleldir.

Üçgenin AB ve AC kenarlarını DE doğrusunun orantılı olarak kestiğini farzedelim. Yani,

$$\frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC} \text{ veya } \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC} \qquad (1)$$

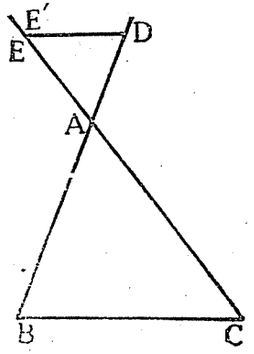
olsun. Bu takdirde DE doğrusu BC kenarına paraleldir. Çünkü, D noktasından BC ye bir DE′ paralelini çizelim. Esas teoremden dolayı,

$$\frac{DA}{E'A}=\frac{DB}{E'C} \text{ veya } \frac{DA}{DB}=\frac{E'A}{E'C} \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) bağıntılarından,

$$\frac{E'A}{E'C}=\frac{EA}{EC}$$

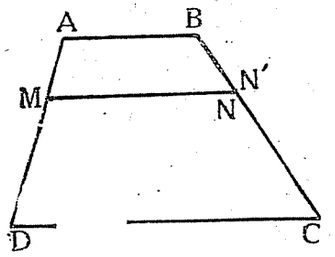
bulunur.



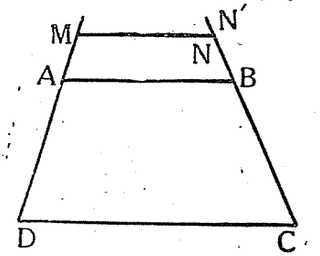
Şek. 226

Bu eşitlik, E, E′ noktalarının çakışık olduğunu gösterir. Çünkü, AC doğru parçasını verilen bir orana göre bölen bir ve ancak bir nokta vardır (No. 231 - II).

229. *Teorem. — Bir yamuğun tabanlarına çizilen paralel bir doğru, paralel olmayan kenarlar üzerinde orantılı parçalar ayırır.*



Şek. 227



Şek. 228

Bir ABCD yamuğunun AD kenarı üzerinde aldığımız bir M noktasından AB ve CD tabanlarına MN paralelini çizelim (Şek. 227 - 228).

Tales teoremine göre,

$$\frac{MA}{NB}=\frac{MD}{NC}=\frac{AD}{BC}$$ elde edilir.

230. *Karşıt teorem. — Bir doğru, yamuğun paralel olmayan kenarları üzerinde orantılı parçalar ayırırsa, bu doğru yamuğun tabanlarına paraleldir.*

Yamuğun AD ve BC kenarlarını MN doğrusunun orantılı olarak kestiğini farzedelim. Yani,

$$\frac{MA}{NB}=\frac{MD}{NC} \quad \text{veya} \quad \frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC} \qquad (1)$$

ise, MN doğrusu tabanlara paraleldir. Çünkü, M noktasından tabanlara MN′ paralelini çizelim. Esas teoremden dolayı,

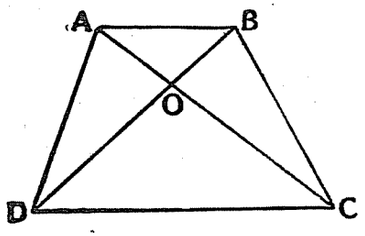
$$\frac{MA}{N'B}=\frac{MD}{N'C} \quad \text{veya} \quad \frac{MA}{MD}=\frac{N'B}{N'C} \qquad (2)$$

yazılır. (1) ve (2) den,

$$\frac{N'B}{N'C}=\frac{NB}{NC}$$

bulunur ki, bu da N′ noktasiyle N noktasının çakışmış olduğunu gösterir.

İhtar. — Bir yamukta köşegenler birbirini tabanlarla orantılı olarak bölerler.



Şek. 229

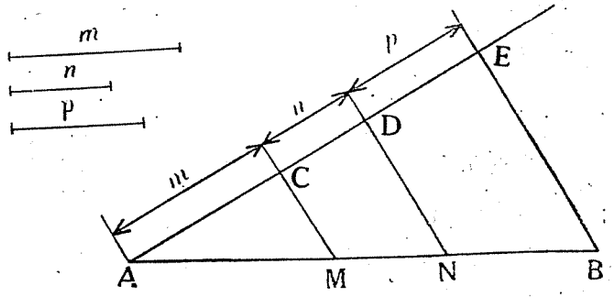
Gerçekten, yamukta tabanlar, köşegenlerin teşkil ettiği açının kenarları arasında kalan paralel doğru parçaları olup, Tales II ye göre

$$\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}=\frac{DC}{AB}$$

elde edilir (Şek. 229).

231. *Uygulama. I. — Bir doğru parçasını bir çok doğru parçalariyle orantılı olarak bölmek.*

AB doğru parçasını verilen m, n, p doğru parçalariyle orantılı olarak bölelim (Şek. 230).



Şek. 230

Ax yarım doğrusu üzerinde sıra ile $AC=m$, $CD=n$, $DE=p$ alalım. B ile E yi birleştirelim ve C, D noktalarından BE ye CM, DN paralellerini çizelim.

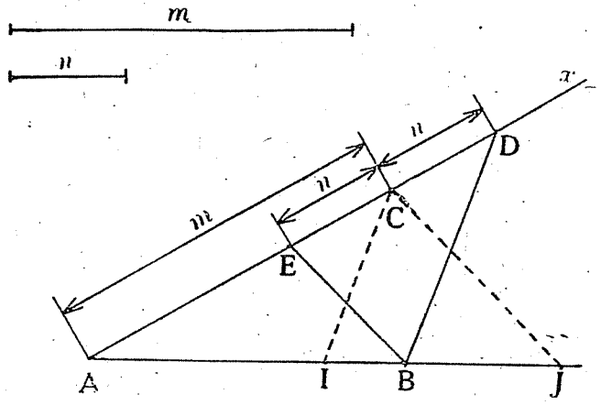
Tales teoremine göre

$$\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{CD}=\frac{NB}{DE} \quad \text{veya} \quad \frac{AM}{m}=\frac{MN}{n}=\frac{NB}{p}$$

elde edilir.

II. — Verilen bir doğru parçasını verilen bir oranda bölmek.

Ax üzerinde $AC=m$ ve $CD=CE=n$ alalım (Şek. 231). D ve E



Şek. 231

noktalarını B ile birleştirelim ve C den DB ye CI ve EB ye CJ paralellerini çizelim. Aranan noktalar I ve J dir. Çünkü, Tales teoreminden

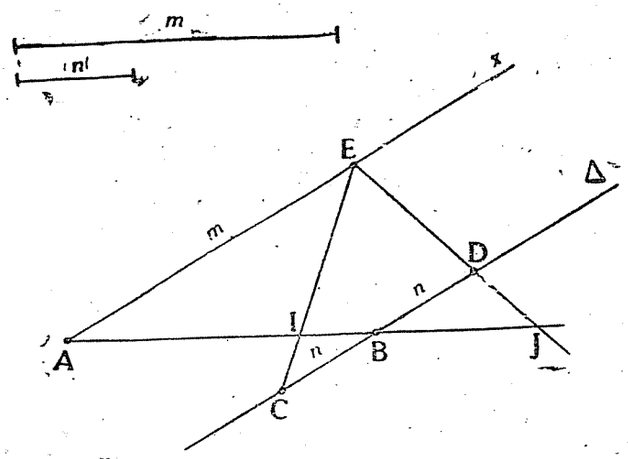
$$\frac{IA}{IB}=\frac{CA}{CD}=\frac{m}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{JA}{JB}=\frac{CA}{CE}=\frac{m}{n}$$

dir. Bu I ve J noktalarına, AB doğru parçasını $\frac{m}{n}$ oranında *içten* ve *dıştan bölüyor* denir.

I, J noktaları şu çizim yolu ile de bulunabilir:

Ax yarım doğrusuna B noktasından bir Δ paraleli çizilir. Ax üzerinde $AE=m$; Δ üzerinde de $BC=BD=n$ olmak üzere E, C, D noktaları alınır. E noktası C ve D noktaları ile birleştirilerek I ve J noktaları elde edilir (Şek. 232).

Bu ikinci çizimde, Ax yarım doğrusunu AB ye dik almak çizimi biraz daha kolaylaştırır.



Şek. 232

III. — Verilen a, b, c uzunlukları arasında dördüncü orantılının çizimi.

Verilen üç doğru parçası a, b, c olsun. Aranan dördüncü orantılının uzunluğunu x ile gösterirsek,

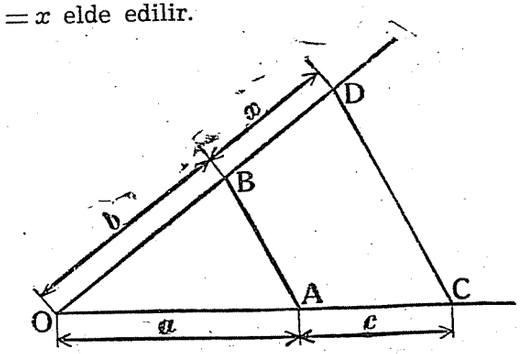
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

olacak surette x uzunluğunu arayalım,

Bir yOz açısının kenarları üzerinde $OA = a$, $OB = b$ ve $AC = c$ alalım. A ile B yi birleştirerek C den AB ye CD paralelini çizelim (Şek. 233). BD aranan uzunluktur. Çünkü,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} \quad \text{veya} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{BD}$$

bulunarak $BD = x$ elde edilir.



Şek. 233

IX. ALIŞTIRMALAR

1. Bir ABC üçgeninin BC kenarı üzerindeki bir D noktasından AB ve AC kenarlarına çizilen paraleller diğer kenarları E ve F noktalarında kestiklerine göre:

1° $$\frac{AF}{AB} = \frac{CD}{CB} \; ; \; \frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

olduğunu gösteriniz.

2° D yi nasıl seçmelidir ki EF, BC ye paralel olsun?

2. Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G dir. G den AB ve AC ye çizilen paraleller BC yi D ve E noktalarında kesmektedir:

1° $\frac{BD}{BC} = \frac{EC}{BC}$ olduğunu gösteriniz.

2° $BD = DE = EC$ olduğunu gösteriniz.

3. 1° Bir ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ olacak şekilde bir D noktası bulunuz (çiziniz).

2° D den AB ve AC ye çizilen paraleller AC yi E, AB yi F noktalarında kestiklerine göre $\frac{AF}{AB} = 2 \cdot \frac{AE}{AC}$ olduğunu gösteriniz.

3° EF doğrusunun, ABC üçgeninin B köşesinden geçen kenarortayına paralel olduğunu gösteriniz.

4. Bir ABCD dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktası olan O dan BC ye çizilen paralel AB yi E, CD ye çizilen paralel AD yi F, AB ye çizilen paralel BC yi H ve AD ye çizilen paralel CD yi G de kesiyor:

1° EF ve GH doğruları BD ye paraleldir.

2° O noktası AC nin orta noktası ise, EFGH dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

5. Bir ABC üçgeninin BC kenarı uzantısında ve B nin tarafında D, C nin tarafında E noktaları alınıyor. D den AB ye ve E den AC ye çizilen paralellerin kesim noktaları F olup, FA, BC yi M noktasında kesmektedir:

1° $\frac{MB}{BD} = \frac{MC}{CE}$ dir.

2° $BD = CE$ olursa, M noktasının BC ni nortası olduğunu gösteriniz.

6. u ve v doğru parçalarının s toplamı ve $\frac{u}{v} = \frac{m}{n}$ oranı bilindiğine göre u ve v doğru parçalarını bulmak (s verilen bir uzunluk m, n verilen sayılardır).

7. d farkları bilinen ve birbirine oranı $\frac{m}{n}$ olan u ve v doğru parçalarını bulunuz.

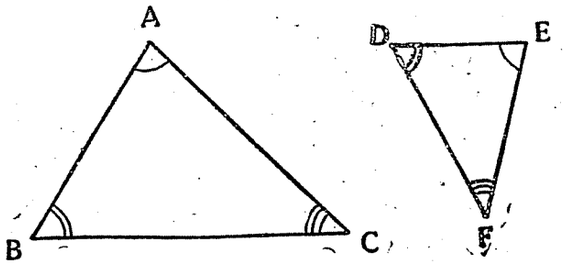
8. $a + h_a = 10$ cm, $\frac{a}{h_a} = \frac{3}{2}$ ve $\widehat{A} = 60°$ bağıntılarına uygun üçgeni çiziniz.

BÖLÜM X

ÜÇGENLERİN BENZEŞİMİ

232. *Tanım.* — İki üçgenin açıları eşit ve eşit açılar karşısındaki kenarlar orantılı ise, bu iki üçgene *benzer üçgenler* denir.

ABC ve DEF üçgenlerini alalım (Şek. 234). Aşağıdaki beş bağıntı



Şek. 234

varsa bu iki üçgen benzer üçgenlerdir:

$$\widehat{A}=\widehat{E},\quad \widehat{B}=\widehat{D},\quad \widehat{C}=\widehat{F}$$

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{FD}=\lambda.$$

Burada λ ya *benzeşim oranı* denir.

233. *Teorem. — 1 inci hal. İki üçgenin iki açısı birbirine eşitse bu üçgenler birbirinin benzeridir.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinde

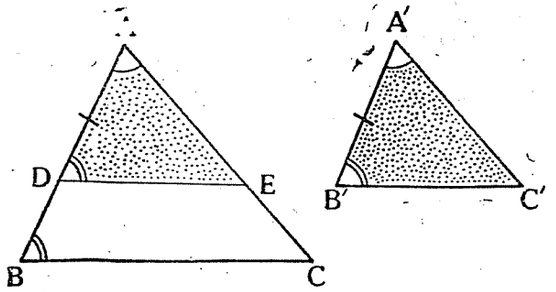
$$\widehat{A}=\widehat{A'}\quad \text{ve}\quad \widehat{B}=\widehat{B'}$$

olsun (Şek. 235).

AB üzerinde $AD=A'B'$ alalım, D noktasından BC ye DE paralelini çizelim. ADE ve ABC üçgenleri birbirinin benzeridir. Çünkü, açıları eşit ve Tales teoreminden de

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

bağıntısı yazılacağı kolayca görülür. Halbuki ADE üçgeni A'B'C' üçgenine (A. K. A.) teoreminden dolayı eşit olduğundan ABC ve A'B'C' üçgenleri de birbirinin benzeri olur.



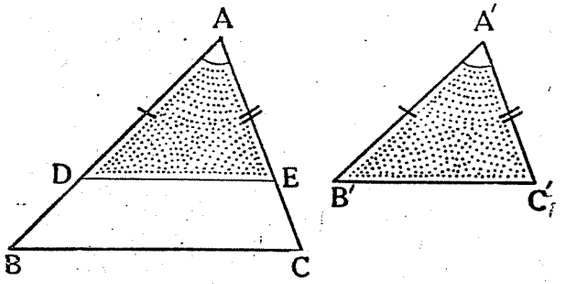
Şek. 235

234. *Teorem. — 2 nci hal. İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları orantılı ve aralarındaki açılar eşit ise, bu üçgenler birbirinin benzeridir.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinde

$$\widehat{A}=\widehat{A'}\quad \text{ve}\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\lambda$$

olsun (Şek. 236).



Şek. 236

Buradan,

$$A'B'=\lambda\cdot AB\quad \text{ve}\quad A'C'=\lambda\cdot AC$$

yazılır.

AB kenarı üzerinde $AD=A'B'=\lambda\cdot AB$ alalım ve D noktasından BC ye DE paralelini çizelim. ADE ve ABC üçgenleri benzer olup benzeşim oranı λ dır. Buradan $AE=\lambda\cdot AC$ veya $AE=A'C'$ olur. Bundan dolayı ADE ve A'B'C' üçgenleri (K. A. K.) teoreminden eşit olur ki, ABC ve A'B'C' üçgenlerinin de benzer olduğu anlaşılır.

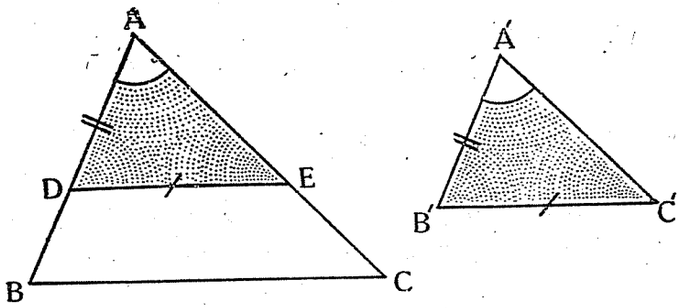
235. *Teorem. — 3 üncü hal. İki üçgende ikişer kenar orantılı, bu*

kenarlardan büyük olanların karşısındaki açılar eşitse, bu iki üçgen birbirinin benzeridir.

ABC ve A′B′C′ üçgenlerinde,

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\lambda. \qquad \widehat{A}=\widehat{A'}\ [B'C'>A'B'\ (*)]$$

olsun (Şek. 237). Buradan,



Şek. 237

$$A'B'=\lambda\cdot AB, \qquad B'C'=\lambda\cdot BC$$

olur. AB kenarı üzerinde $AD=A'B'=\lambda\cdot AB$ alalım ve D noktasından BC ye DE paralelini çizelim. ADE ve ABC üçgenleri benzer olup, benzeşim oranı λ dır. Buna göre,

$$DE=\lambda\cdot BC=B'C'$$

olur ki, A′B′C′ ve ADE üçgenlerinin (K. K. A.) teoreminden eşit oldukları görülür [$AD=A'B'$; $DE=B'C'$; $\widehat{A}=\widehat{A'}$].

Bundan dolayı ADE üçgeninin benzeri olan ABC üçgeni, A′B′C′ üçgeninin de benzeri olur.

236. *Teorem. — 4 üncü hal. İki üçgenin üç kenarı orantılı ise, bu üçgenler birbirinin benzeridir.*

ABC ve A′B′C′ üçgenlerinde,

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\lambda$$

olsun (Şek. 238).

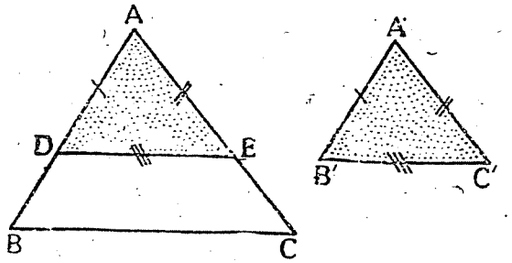
Buradan,

$$A'B'=\lambda\cdot AB, \qquad A'C'=\lambda\cdot AC, \qquad B'C'=\lambda\cdot BC$$

olur.

AB kenarı üzerinde $AD=A'B'=\lambda\cdot AB$ alalım ve D noktasından

[*] Orantı dolayısiyle BC > AB olacağı aşikârdır.



Şek. 238

BC ye DE paralelini çizelim. ADE ve ABC üçgenleri benzer olup benzeşim oranı λ dır. Buradan,

$$AD=\lambda\cdot AB, \qquad AE=\lambda\cdot AC \quad \text{ve} \quad DE=\lambda\cdot BC$$

olduğundan

$$AE=A'C' \quad \text{ve} \quad DE=B'C'$$

elde edilir ki; ADE ve A′B′C′ üçgenleri (K. K. K.) teoreminden eşit ve dolayısiyle ABC ve A′B′C′ üçgenlerinin de benzer oldukları görülür.

237. *Sonuçlar.* — Benzeşim teoremlerinden şu sonuçlar hemen elde edilir :

1° *İki eşkenar üçgen benzerdir (1 inci hal).*

2° *Taban (veya tepe) açıları eşit ikizkenar üçgenler benzerdir (2 nci hal).*

Özel hal : İkizkenar dik üçgenler benzerdir.

3° *Birer dar açıları eşit olan dik üçgenler benzerdir (1 inci hal).*

4° *Dik kenarları orantılı olan dik üçgenler benzerdir (2 nci hal).*

238. *Teorem. — İki dik üçgenin hipotenüsü ile birer dik kenarları orantılı ise, bu dik üçgenler benzerdir.*

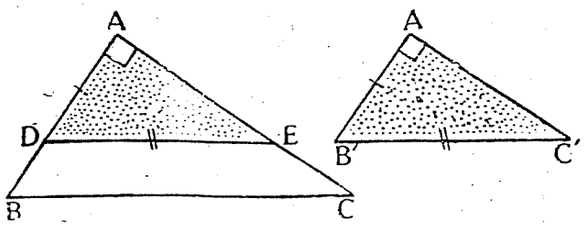
ABC ve A′B′C′ üçgenlerinde,

$$\widehat{A}=\widehat{A'}=1^D \quad \text{ve} \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\lambda$$

olsun (Şek. 239).

$$A'B'=\lambda\cdot AB \quad \text{ve} \quad B'C'=\lambda\cdot BC$$

dir. AB kenarı üzerinde $AD=A'B'=\lambda\cdot AB$ alalım ve D noktasından BC ye DE paralelini çizelim.



Şek. 239

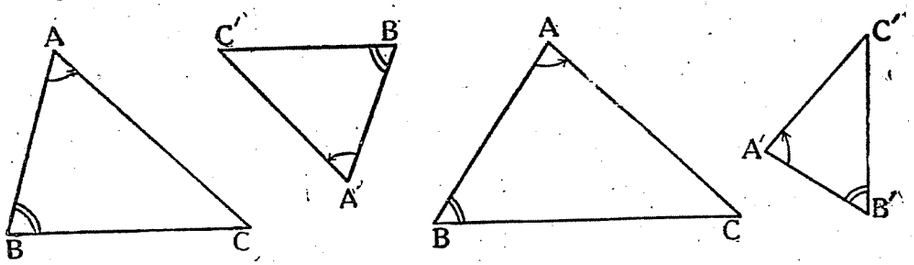
ADE ve ABC üçgenleri benzer olup, benzeşim oranı λ dır. Buna göre

$$DE = \lambda \cdot BC$$

olur. $AD = A'B'$ alındığından $DE = B'C'$ olduğu görülür; ADE ve A'B'C' üçgenleri eşit, dolayısiyle A'B'C' ve ABC üçgenleri benzer olur.

239. *Teorem. — Karşılıklı kenarları birbirine paralel (veya dik) iki üçgen birbirinin benzeridir.*

ABC ve A'B'C' üçgenlerinin karşılıklı kenarları, birbirine paralel (veya dik) olsun (Şek. 240 *a*, *b*).



(a) Şek. 240 (b)

Kenarları birbirine paralel (veya dik) olan açılar, birbirine eşit veya bütünler olduğundan (No. 35 - 36).

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad \text{veya} \quad \widehat{A} + \widehat{A'} = 2^D$$
$$\widehat{B} = \widehat{B'} \quad » \quad \widehat{B} + \widehat{B'} = 2^D$$
$$\widehat{C} = \widehat{C'} \quad » \quad \widehat{C} + \widehat{C'} = 2^D$$

dır. Birinci halde üçgenlerin benzer olduğu derhal görülüyor. İkinci halde ise böyle bir eşitliğin mümkün olmıyacağı anlaşılır. Gerçekten bu ikinci bağıntıyı taraf tarafa toplarsak

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A'} + \widehat{B'} + \widehat{C'} = 6^D \qquad (1)$$

olur. Halbuki üçgenlerin iç açılarının toplamı 2^D dır. Burada bu (1) toplamı 4^D etmesi icabederken 6^D olmuştur.

İhtar. — Üçüncü ve dördüncü hal olarak meselâ

$$\widehat{A} + \widehat{A'} = 2^D, \qquad \widehat{B} = \widehat{B'}, \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

ve

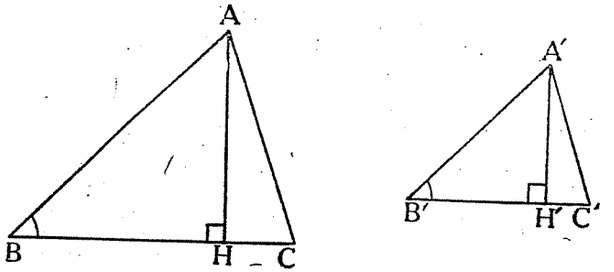
$$\widehat{A} + \widehat{A'} = 2^D, \qquad \widehat{B} + \widehat{B'} = 2^D, \qquad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

olmaları akla gelirse de; bu haller tetkik edildiğinde, üçüncü için

$$\widehat{A} = \widehat{A'} = 1^D$$

bulunur ki, bu da birinci halden başka bir şey değildir. Dördüncü hal ise, $\widehat{C} = \widehat{C'} = 0$ olur ki, bunun da mümkün olmadığı aşikârdır.

240. *Teorem. — Benzer iki üçgende yüksekliklerin oranı benzeşim oranına eşittir.*



Şek. 241

Benzer iki üçgen ABC ve A'B'C' ve BC, B'C' kenarlarına inen yükseklikler AH ve A'H' olsun (Şek. 241). AHB ve A'H'B' üçgenlerinde

$$\widehat{H} = \widehat{H'} = 1^D \quad \text{ve} \quad \widehat{B} = \widehat{B'}$$

olduğundan bu üçgenler benzerdir. Bundan dolayı,

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = \lambda$$

yazılır.

İhtar. — Aynı şekilde, iki benzer üçgenin açıortaylarının, kenarortaylarının, dış ve iç çemberlerinin yarıçaplarının oranlarının da benzeşim oranına eşit olduğu ispat edilebilir. Bunları bir uygulama olmak üzere, öğrenciye bırakıyoruz.

241. *Teorem. — Benzer iki üçgenin alanlarının oranı, benzeşim oranının karesine eşittir.*

Benzer iki üçgen ABC ve A'B'C' olsun (Şek. 241).

Bu iki üçgenin alanları

$$S = \frac{BC \cdot AH}{2} \quad \text{ve} \quad S' = \frac{B'C' \cdot A'H'}{2}$$

dir. Buradan,

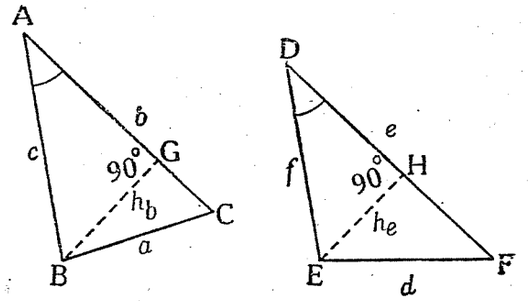
$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{BC \cdot AH}{2}}{\frac{B'C' \cdot A'H'}{2}} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AH}{A'H'}$$

yazılabilir. Benzeşim oranı λ ise ve $\frac{BC}{B'C'} = \lambda$, $\frac{AH}{A'H'} = \lambda$ olduğundan

$$\frac{S}{S'} = \lambda^2$$

elde edilir.

242. *Teorem. — Birer açıları eşit iki üçgenin alanlarının birbirine oranı; açıları sınırlayan iki kenarın çarpımlarının birbirine oranına eşittir.*



Şek. 242

Birer açıları $(\widehat{A} = \widehat{D})$ eşit iki üçgen ABC ve DEF olsun (Şek. 242) B ve E (veya C ve F) köşelerinden geçen yükseklikleri çizelim. ABG ve DHE üçgenlerinin benzer olduğu kolayca görülür (birinci hal). Buna göre

$$\frac{h_b}{h_e} = \frac{c}{f} \qquad (1)$$

olur. Üçgenlerin alanlarının oranı ise

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{b \cdot h_b}{2}}{\frac{e \cdot h_e}{2}} = \frac{b}{e} \cdot \frac{h_b}{h_e}$$

veya (1) bağıntısına göre

$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{b \cdot c}{e \cdot f}}$$

elde edilir.

İhtar. — A ve D açıları birbirinin bütünleri ise, teorem gene doğrudur.

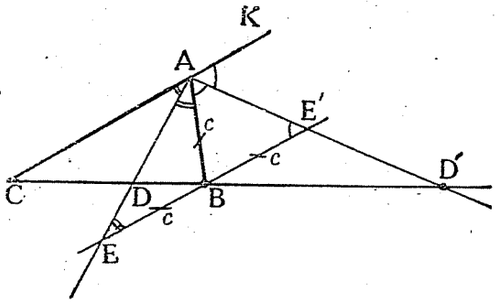
BİR ÜÇGENİN AÇIORTAYLARININ ÖZELLİKLERİ

243. *Teorem. — Bir üçgenin bir açısının açıortayları karşılarındaki kenarı, komşu kenarlarla içten ve dıştan orantılı olarak böler.*

ABC üçgenini alalım. B noktasından AC ye çizilen paralel, A açısının AD iç açıortayının E ve AD′ dış açıortayını E′ noktasında kessin (Şek. 243). ABE ve ABE′ üçgenleri ikizkenar olup

$$BE = BE' = AB$$

dir.



Şek. 243

ACD ve DBE; ACD′ ve D′BE′ üçgenlerinin benzerliğinden dolayı

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{AC} \quad \text{ve} \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{E'B}{AC}$$

dir. $BE = BE' = AB$ konarak

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{ve} \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

bulunur. Şuhalde,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$

elde edilir.

İhtar. — Eğer üçgen ikizkenar ise D, BC; nin orta noktası olacağından AD′, CB ye paralel olup D′ sonsuzdadır.

244. *Karşıt teorem. — Bir üçgenin A köşesini, BC kenarını AB ve AC kenarlariyle orantılı olarak bölen noktalarla birleştiren doğrular A açısının açıortaylarıdır.*

Üçgenin BC kenarını AC ve AB ile orantılı olarak bölen noktalar D ve D′ olsun.

Hipoteze göre,

$$\frac{DC}{DB}=\frac{D'C}{D'B}=\frac{b}{c} \qquad (1)$$

dir. B noktasından AC ye çizilen paralelin AD ve AD′ yü kestiği noktalar E ve E′ olduğuna göre, Tales teoreminden

$$BE=BE'$$

ve

$$\frac{DC}{DB}=\frac{b}{BE} \qquad (2)$$

yazılır. (1) ile (2) karşılaştırılırsa

$$BE=BE'=c$$

olur ki, bu da, ABE ve ABE′ üçgenlerinin ikizkenar olduğunu gösterir.

Buna göre,

$$\widehat{AEB}=\widehat{EAB} \quad \text{ve} \quad \widehat{BAE'}=\widehat{BE'A}$$

olur. Halbuki AC, EE′ ye paralel olduğundan,

$$\widehat{AEB}=\widehat{EAC} \quad \text{ve} \quad \widehat{BE'A}=\widehat{E'AK}$$

dır. Buradan

$$\widehat{EAB}=\widehat{EAC} \quad \text{ve} \quad \widehat{BAE'}=\widehat{E'AK}$$

bulunur.

245. DB, DC, D′B′ ve D′C *parçalarının hesabı* (Şek. 243). — $BC=a$, $CA=b$ ve $AB=c$ olsun $(b>c)$.

1° $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{c}{b}$ ve $DB+DC=BC=a$

dır. Buna göre

$$\frac{DB}{c}=\frac{DC}{b}=\frac{DB+DC}{c+b}=\frac{a}{b+c}$$

yazılır. Buradan da

$$D'B=\frac{ac}{b+c} \quad \text{ve} \quad DC=\frac{ab}{b+c}$$

elde edilir.

2° Aynı şekilde

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{c}{b} \quad \text{ve} \quad D'C-D'B=BC=a$$

olduğundan

$$\frac{D'B}{c}=\frac{D'C}{b}=\frac{D'C-D'B}{b-c}=\frac{a}{b-c}$$

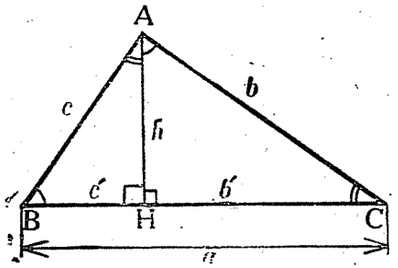
bulunur. Nihayet,

$$DB=\frac{ac}{b-c} \quad \text{ve} \quad D'C=\frac{ab}{b-c}$$

elde edilir.

DİK ÜÇGENLERDE METRİK BAĞINTILAR

246. *Yardımcı teorem.* — *Bir ABC dik üçgeninde A köşesinden BC hipotenüsüne indirilen dikmenin ayırdığı iki üçgenle ABC üçgeni birbirinin benzeridir.*



Şek. 244

HBA ve ABC üçgenleri birer dik üçgen olup B açıları ortak olduğundan; aynı suretle HAC ve ABC üçgenleri de dik üçgen olup C açıları ortak olduğundan, HBA ve HAC üçgenleri ABC üçgeninin benzeri ve bundan dolayı bunlar da birbirinin benzeridir (1 inci hal) (Şek. 244).

247. *Teorem.* — *(Dik kenar teoremi). Bir dik üçgende bir dik kenar, hipotenüs ile bu dik kenarın hipotenüs üzerindeki izdüşümü arasında orta orantılıdır.*

ABC ve HBA üçgenlerinin benzerliğinden (Şek. 244),

$$\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{AB} \quad \text{veya} \quad \overline{AB}^2=BC\cdot HB$$

aynı suretle ABC ve HAC üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{AC}{HC}=\frac{BC}{AC} \quad \text{veya} \quad \overline{AC}^2=BC\cdot HC$$

elde edilir.

İhtar. — Üçgende $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $AH=h$, $BH=c'$, $CH=b'$ alınarak, yukarıdaki teorem kısaca

$$\boxed{b^2=a\cdot b',\quad c^2=a\cdot c'} \qquad (1)$$

şeklinde yazılır.

248. *Teorem.* — *Pythagoras (Pitagor) teoremi. Bir dik üçgende hipotenüsün karesi, dik kenarların kareleri toplamına eşittir.*

Nr. 247 deki (1) bağıntılarını taraf tarafa toplarsak

$$b^2+c^2=ab'+ac'$$
$$b^2+c^2=a(b'+c')$$

$$\boxed{b^2+c^2=a^2}$$

elde edilir.

249. *Teorem. — (Yükseklik teoremi). Bir dik üçgende hipotenüse indirilen dikme, hipotenüs üzerinde ayırdığı parçalar arasında orta orantılıdır.*

HBA ve HAC üçgenleri benzer olduklarından,

$$\frac{HB}{HA}=\frac{HA}{HC} \quad \text{veya} \quad \overline{HA}^2 = HB \cdot HC$$

bulunur (Şek. 244). Buradan,

$$\boxed{h^2 = b' \cdot c'}$$

elde edilir.

250. *Teorem. — Bir dik üçgenin iki dik kenarının çarpımı, hipotenüs ile hipotenüse ait yüksekliğin çarpımına eşittir.*

ABC ve HBA üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{AC}{HA}=\frac{BC}{BA}$$

olup (Şek. 244), buradan

$$BA \cdot AC = BC \cdot HA$$

veya

$$\boxed{bc = ah}$$

elde edilir.

251. *Sonuçlar I. — Bir dik üçgende, dik kenarların karelerinin oranı, yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçaların oranına eşittir.*

No. 247 deki (1) bağıntılarını taraf tarafa bölersek,

$$\boxed{\frac{b^2}{c^2}=\frac{b'}{c'}}$$

bulunur.

II. — Bir dik üçgende, hipotenüse inen yüksekliğin tersinin karesi, dik kenarların terslerinin kareleri toplamına eşittir.

No. 250 ve 248 deki bağıntılardan

$$b^2c^2 = a^2h^2 \quad \text{veya} \quad b^2c^2 = h^2(c^2+b^2)$$

yazılabilir. Her iki taraf $h^2c^2b^2$ ile bölünürse,

$$\boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

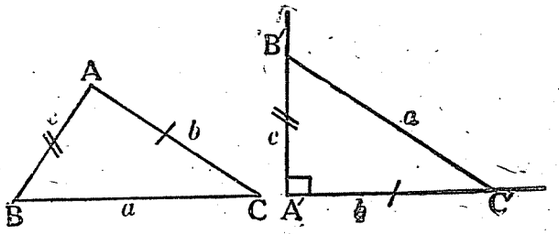
elde edilir.

252. *Pythagoras teoreminin karşıtı. — Bir üçgende iki kenarın kareleri toplamı, üçüncü kenarın karesine eşitse, bu üçgen dik üçgendir.*

Bir ABC üçgeni alalım (Şek. 245 *a*). Hipoteze göre,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

dir. Dik kenarları $A'B' = c$, $A'C' = b$ olan bir A'B'C' dik üçgeni çizelim (Şek. 245 *b*). Esas teoreme göre,



(a) Şek. 245 (b)

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'C'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

dir (Şek. 245). Buradan,

$$B'C' = BC$$

elde edilir. Ohalde A'B'C' dik üçgeni (K. K. K.) teoreminden dolayı ABC üçgenine eşit olur ki; bu da, ABC üçgeninin de bir dik üçgen olduğunu gösterir.

İhtar. — Yukarıki ispattan şu netice anlaşılır: Verilen *a*, *b*, *c* gibi üç çokluk, aralarında $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısını sağlıyorsa: bu üç çokluk, dik kenarları *b*, *c*; hipotenüsü *a* olan bir dik üçgenin kenarlarını gösterir.

253. *Uygulama. I. — Bir dikdörtgenin köşegeni.* ABCD dikdörtgeninin kenarları $AB = a$ ve $BC = b$ olsun (Şek. 246).

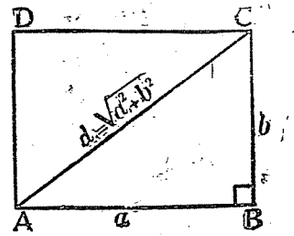
ABC dik üçgeninde

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad \text{veya} \quad d^2 = a^2 + b^2$$

olur. Buradan,

$$\boxed{d = \sqrt{a^2+b^2}}$$

elde edilir.

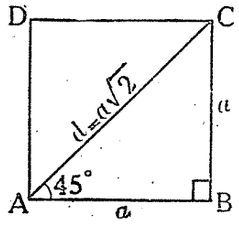


Şek. 246

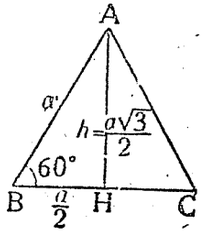
II. — Bir karenin köşegeni. ABCD karesinin (Şek. 247) kenarı a ise

$$d^2 = a^2 + a^2 \quad \text{veya} \quad \boxed{d = a\sqrt{2}} \quad (\sqrt{2} = 1{,}414\ldots)$$

olur. Bu formül, eşit kenarları a olan ikizkenar dik üçgenin hipotenüsünü verir.



Şek. 247



Şek. 248

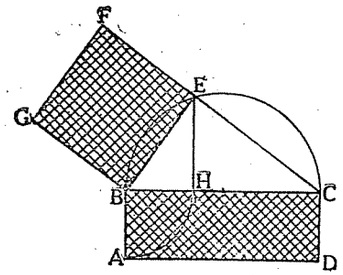
III. — Eşkenar üçgenin yüksekliği. ABC eşkenar üçgeninin, kenarı a ve A dan BC ye inen yüksekliği $AH = h$ olsun (Şek. 248).

$$BH = \frac{a}{2} \quad \text{ve} \quad \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \text{ olup,}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \quad \text{veya} \quad \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}} \quad (\sqrt{3} = 1{,}732\ldots)$$

elde edilir.

IV. — Dik kenar bağıntısı yardımı ile bir dikdörtgene eşdeğerli kare çizmek. —



Şek. 249

ABCD dikdörtgeninde $BC = a$ $AB = b$ olsun (Şek. 249).

BC çaplı yarım çemberi çizilir, BC üzerinde $BH = AB = b$ uzunluğu alınır ve H noktasından BC ye çizeceğiniz dikme, yarım çemberi E noktasında keserse, BE kenarlı kare, ABCD dikdörtgenine eşdeğerlidir. Çünkü, BEC dik üçgeninde

$$\overline{BE}^2 = BH \cdot BC$$

dir.

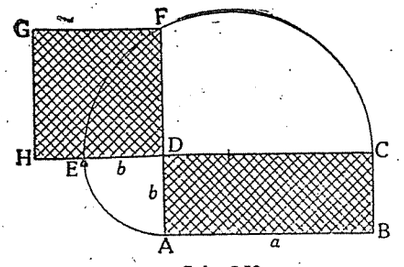
V. — Yükseklik bağıntısı yardımı ile bir dikdörtgene eşdeğerli kare çizmek. —

ABCD dikdörtgeninin tabanı $AB = DC = a$, yüksekliği $AD = b$ olsun (Şek. 250).

DC yi $ED = b$ kadar uzatıp EC çaplı yarım çember çizilir. D noktasından EC ye çizeceğimiz dikmenin yarım çemberi kestiği nokta F ise DF kenarlı kare ABCD dik dörtgenine eşdeğerlidir. Çünkü

$$\overline{DF}^2 = ED \cdot DC = a \cdot b$$

dir.

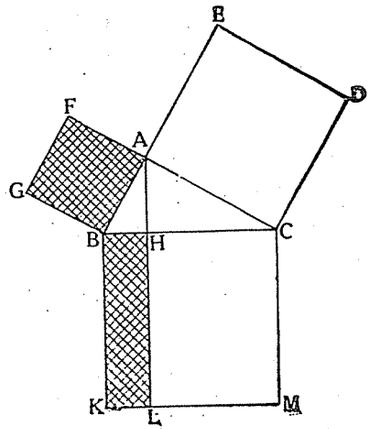


Şek. 250

VI. — Pythagoras bağıntısının alanlarla gösterilişi. — ABGF karesi ile BHLK dikdörtgeni eşdeğerli midir (Şek. 251)?

ACDE karesi ile CMLH dikdörtgeni eşdeğerli midir?

BHLK ve HCML dikdörtgenlerinin toplamı olan BCMK karesi ABGF ve ACDE karelerinin toplamına eşdeğerli olur mu?



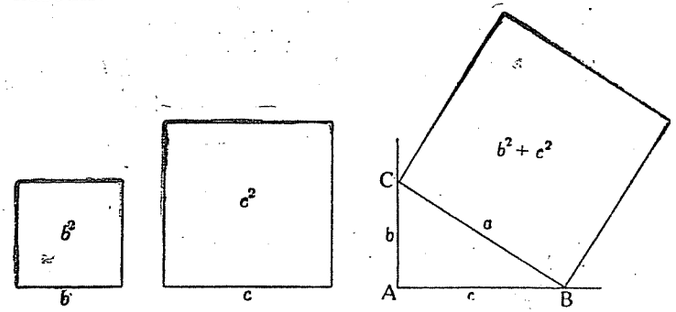
Şek. 251

254. *Çizim. — İki karenin toplamına eşdeğerli olan kareyi çiziniz.*

Kenar uzunlukları b ve c olan iki karenin toplamına eşdeğerli karenin bir kenarı a ise (Şek. 252):

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ dir.}$$

Dik kenarları b ve c olan ABC dik üçgeni çizilir. Bu dik üçgenin hipotenüsü üzerine kurulacak CBDE karesi, verilen karelerin toplamına eşdeğerli karedir.



Şek. 252

ALIŞTIRMALAR

1. ABC üçgeninde $b = 2{,}4$ cm, $c = 3{,}6$ cm, $A = 70°$ ve A'B'C' üçgeninde $b' = 2{,}8$ cm, $c' = 4{,}2$ cm, $A' = 70°$ olduğuna göre bu iki üçgen niçin birbirinin benzeridir?

2. Benzer iki üçgenin h_a, h'_a karşılıklı yükseklikleri 8 cm ve 10 cm dir. $S' = 20$ cm² olduğuna göre, S alanını ve a, a' kenarlarını hesaplayınız.

3. 1° ABC üçgeninin $a = 20$ cm tabanına bir $DE = 12$ cm paraleli çizilmiştir. ADE üçgeninin alanı 36 cm² olduğuna göre DECB yamuğunun alanını hesaplayınız.

2° Bu yamuğun, tabanları $BC = 20$ cm, $DE = 16$ cm ve alanı 360 cm² olduğu takdirde ADE üçgeninin alanını hesaplayınız.

4. Kenarları $a = 48$, $b = 36$, $c = 24$ olan ABC üçgeninde AB kenarı üzerinde alınan D, F, H noktalarından BC kenarına DE, FG ve HI paralelleri çizilmiştir:

1° $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ olduğuna göre, DE nin uzunluğunu hesap ediniz.

2° $FB = 12$ olduğuna göre, FG nin uzunluğunu hesap ediniz.

3° $HI = 16$ olduğuna göre, H noktası AB kenarını hangi oranda bölmelidir?

5. Çevresi 14 cm olan bir üçgene benzer diğer bir üçgenin kenarları 17 cm, 21 cm, 32 cm olduğuna göre, ilk üçgenin kenarları ne büyüklüktedir?

6. Bir kulenin gölgesi 12 m dir. Kulenin yanında 3 m yüksekliğinde ve yere dik olan bir flâmanın gölgesi 0,6 m olduğuna göre, kulenin yüksekliğini bulunuz.

7. Bir ABC ikizkenar üçgeninde $(AB = AC)$ A noktasından geçen, BC doğrusunu D ve çevrel çemberi E noktasında kesen bir doğru çiziliyor:

1° ABD ve AEB üçgenlerini karşılaştırınız.

2° $\overline{AB}^2 = AD \cdot AE$ olduğunu ispatlayınız.

8. Kesişen iki çemberin bir ortak noktasından geçen üç kesen çemberlerden birini A, B, C, diğerini A', B', C' noktalarında kesiyor. ABC üçgeninin A'B'C' ye benzerliğini ispatlayınız.

9. Bir üçgende $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ve 1° v_a 2° n_A 3° h_a elemanları bilindiğine göre, bu üçgenleri çiziniz. (Yol gösteriş: Evvelâ aranan üçgenin benzerini çiziniz).

10. Bir üçgende $\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$, $\widehat{A}$ ve

1° n_A 2° v_a 3° h_a

elemanları bilindiğine göre, üçgenleri çiziniz.

11. $\frac{c}{h_a} = \frac{m}{n}$, $\widehat{C}$ ve a elemanları bilindiğine göre, üçgeni çiziniz.

12. Bir üçgende $\frac{c}{v_a} = \frac{m}{n}$, r ve

1° $\widehat{B}$ 2° $\widehat{A}$

elemanları bilindiğine göre, bu üçgenleri çiziniz (r, üçgenin iç çemberinin yarı çapıdır)

13. h_a, h_b, h_c elemanları bilinen üçgeni çiziniz (Yol gösteriş: Kenarları h_a, h_b, h_c olan üçgen çizilirse, bu üçgenin yüksekliklerinin birbirine oranı a : b : c gibidir).

14. Bir ABC dik üçgeninin hipotenüsü $BC = a$, kenarları $CA = b$, $AB = c$, $AH = h$, $CH = b'$, $BH = c'$ alınıyor. Bu üçgenin aşağıdaki elemanları bilindiğine göre, diğer elemanlarını bulunuz:

1° $b = 130$; $c = 312$. 2° $b = 136$ $h = 120$. 3° $b = 156$; $b' = 144$.
4° $a = 125$; $b = 35$. 5° $b' = 225$ $c' = 64$. 6° $b' = 144$; $h = 510$.

15. ABC üçgeninin AH yüksekliğinin dikme ayağı, B ile, BC nin orta noktası olan M nin arasına düşmektedir. $BH = 75$, $CH = 96$, $AB = 85$ alındığına göre, üçgenin bilinmeyen kenarlarını hesaplayınız.

16. 1° Verilen bir üçgene,
2° » » yamuğa,
3° » » dörtgene,
4° » » beşgene,
5° » » karenin yarısına,
6° » » dikdörtgenin üçte birine,
7° » » paralelkenarın beşte dördüne,
8° » » üçgenin üçte ikisine,
denk bir kare çiziniz.

17. 1° Verilen iki karenin toplamına,
2° » » » farkına,
3° » bir » iki katına,
4° » üç » toplamına,
5° » bir » n katına,
denk bir kare çiziniz.

GENEL ALIŞTIRMALAR

1. AB ve CD doğru parçaları veriliyor. Öyle bir O noktası bulunuz ki (çizerek) OAB ve OCD üçgenleri, tepeleri O olan birer ikizkenar üçgen olsun.

2. Bir xOy açısı ile bir M noktası gözönüne alınıyor. M noktasının Ox ve Oy ye göre simetrikleri M' ve M'' dür.

M'M'' nün orta dikmesinin O dan geçtiğini gösteriniz.

3. Bir ABC üçgeninin MA kenarortayı $MD = MA$ kadar uzatılıyor.

1° $AC = BD$ olduğunu gösteriniz.

2° Bu şekilden faydalanarak, ikişer kenarı ile üçüncü kenara ait kenarortayları eşit iki üçgenin eşit olduğunu ispatlayınız.

3° $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $MA = 13$ cm olan ABC üçgenini çiziniz.

4. ABC üçgeni ikizkenar dik üçgendir. A dik açı köşesinden üçgenin dışında kalmak üzere bir xy doğrusu çiziliyor. B ve C noktalarından bu doğruya BM ve CN dikmeleri indiriliyor. ABC üçgeninin AH yüksekliği çiziliyor:

1° $HA = HB = HC$ 2° $MN = BM + CN$,

3 MHN° üçgeninin bir ikizkenar dik üçgen olduğunu ispatlayınız.

5. Bir ABC üçgeninde BC kenarı iki tarafa $BD = BA$, $CE = CA$ olacak surette uzatılıyor:

1° DE nin, ABC üçgeninin çevresine eşit olduğunu gösteriniz.

2° ADE üçgeninin D ve E açılarını B ve C açıları cinsinden hesaplayınız.

3° Çevresi ve iki açısı bilinen bir üçgen çiziniz.

4° Çevreleri ve ikişer açıları eşit iki üçgenin eşit olduğunu gösteriniz.

6. Bir ABC üçgeni gözönüne alınıyor. A açısının iç açıortayı BC nin orta dikmesini D noktasında kesiyor. D nin AB ve AC üzerindeki izdüşümü E ve F olsun:

1° BDE ve DCF üçgenlerinin eşitliğini gösteriniz. AE ve AF nin AB ve AC nin toplamları yarısını, BE ve CF nin de bu kenarların farkları yarısına eşit olduğunu ispatlayınız.

2° A açısının dış açıortayı ile BC nin orta dikmesinin kesim noktası D′ ve D′ nün AB ve AC üzerindeki izdüşümleri E′ ve F′ olduğuna göre problemi tekrarlayınız.

3° EE′ ve FF′ doğru parçalarının AC ve AB ye eşit olduğunu ispatlayınız.

7. Bir ABC ikizkenar üçgeninin BC tabanı AB den küçüktür. AB ve BC uzatılarak üzerlerinde $DB = CE = AB - BC$ alınıyor:

1° ACE ve EBD üçgenlerinin eşitliğini gösteriniz.

2° ADE açısının BAC ve AED açılarının toplamları yarısına eşit olduğunu ispatlayınız.

8. Bir ABC üçgeninin AC kenarı üzerindeki E noktasından AB ve BC ye çizilen paraleller BC yi D ve AB yi F noktalarında kesiyorlar ve $AE = BF$ farzediliyor:

1° AED üçgeninin ikizkenar bir üçgen olduğunu gösteriniz.

2° ABC üçgeninde, AD nin açıortay olduğunu gösteriniz.

3° ABC üçgeninin BC kenarına paralel ve uçları AC, AB üzerinde olan öyle bir EF doğru parçası çiziniz ki $AE = BF$ olsun.

9. Bir ABC üçgeni ile AH yüksekliği veriliyor. AHBD ve AHCE dikdörtgenleri tamamlanıyor. HD, AB yi P de; HE, AC yi Q de kesiyor:

1° D, A, E noktalarının bir doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

2° PQ nün, AH nin orta dikmesi olduğunu gösteriniz.

3° PQ, BD yi M ve CE yi N noktalarında kestiğine göre, $MN = BC = 2 \cdot PQ$ olduğunu gösteriniz.

10. Bir ABC üçgeninin AA′, BB′, CC′ kenarortaylarının kesim noktası O dur. OA nın orta noktası D, BO nun orta noktası E dir. DEA′B′ nün bir paralelkenar olduğunu ispatlayınız.

11. Bir ABC üçgeninin BB′ ve CC′ kenarortayları 3 cm ve 6 cm uzunluğunda olup birbirini dik kesmektedir:

1° ABC üçgenini çiziniz.

2° Üçüncü kenarortay AA′ dür. C′B′ nün uzantısında $C'B' = B'D$ olmak üzere bir D noktası alınıyor. AD ve A′D uzunluklarını hesaplayınız.

3° AA′D üçgeninin dik bir üçgen olduğunu gösteriniz.

12. Bir ABC üçgeninde $\widehat{A} = 68°$, $\widehat{B} = 62°$ dir. Bu üçgenin yüksekliklerinin kesim noktası H dir. HBC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktası O olduğuna göre, BOH, HOC ve COB açılarını hesaplayınız.

13. Bir ABC üçgeninde MA kenarortayı ile BAM ve MAC açıları bilindiğine göre, üçgeni çiziniz.

14. Köşegenleri ile yüksekliği belli paralelkenarı çiziniz.

15. Bir paralelkenarın üç kenarının orta noktaları veriliyor. Bu paralelkenarı çiziniz.

16. Bir O çemberinin AB ve CD kirişleri çemberin dışında bir P noktasında kesişiyor. AB ve CD nin orta noktaları H ve K olup $AB > CD$ farzediliyor:

1° $HPO < KPO$ olduğunu gösteriniz.

2° $PH > PK$ olduğunu gösteriniz.

17. İki çember A ve B noktalarında kesişiyor. A noktasından geçen değişen bir doğru O çemberini C ve O′ çemberini D noktasında kesiyor. AC ve AD nin orta noktaları M ve N dir:

1° $MN = \dfrac{CD}{2}$ olduğunu gösteriniz.

2° CD yi o suretle çiziniz ki, $CD = 2 \cdot l$ olsun (l, verilen bir uzunluktur).

18. Bir O çemberi ile bir R uzunluğu veriliyor:

Yarıçapı R ve O çemberi ile ortak kirişi O çemberinin çapına eşit olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

19. Bir ABC üçgeni ile çapları AB ve AC olan iki çember veriliyor. AB ve AC nin orta noktaları M ve N birleştirilince bu MN doğrusu birinci çemberi D, E; ikinci çemberi F, G noktalarında kesiyor:

1° BD ve BE nin B açısının; CF ve CG nin C açısının açıortayları olduğunu gösteriniz.

2° D, E, F, G noktalarının, A noktasının B ve C açılarının açıortayları üzerindeki izdüşümleri olduğunu gösteriniz.

20. Aşağıdaki üçgenleri çiziniz:

1° B, C, h_a;	2° a, b, R;	3° A, b, R;	4° a, v_b, R;
5° A, h_a, r;	6° a, b—c, r;	7° a, b+c, r;	8° a, r_a, r;
9° A, h_a, r_b;	10° h_a, v_a, n_A;	11° a, v_b, R.	

21. R yarıçapı verildiğine göre, aşağıdaki elemanları bilinen kirişler dörtgenlerini çiziniz (e, f köşegen uzunluklarıdır):

1° a, d, c;	2° a, c, A;	3° a, B, C;
4° a, f, c;	5° a, e, E;	6° a, b, c.

(E, köşegenler arasındaki açıyı göstermektedir).

22. Aşağıdaki kirişler dörtgenlerini çiziniz:

1° a, b, e, f;	2° a, b, e, E;	3° a, f, C, D.

İÇİNDEKİLER

Sahife

BÖLÜM I

1. Geometri şekilleri 5
Çizgi ve yüzey çeşitleri 5
2. Açı ve açı çeşitleri 9
Paralel doğrular 17
Kenarları paralel ve dik açılar 22
Geometrinin dayandığı temel prensipler 24
I. Alıştırmalar 26

BÖLÜM II

Üçgenler 27
Üçgenin iç ve dış açıları 29
Çokgenin iç ve dış açıları 30

BÖLÜM III

Bir doğruya göre simetri 32
Noktaya göre simetri 34
İkizkenar üçgen 35
Eşkenar üçgen 37
Deltoit 37
Bir üçgenin kenarları ve karşısındaki açılar 38
Dikme ve eğikler 40

BÖLÜM IV

Üçgenlerin eşitliği 42
Dik üçgenlerin eşitliği 45
İki kenarı eşit üçgenler 46
Üçgenlerin çizimleri 47
Dik üçgenlerin çizimleri 54
II. III. IV. Alıştırmalar 54

BÖLÜM V

Tanım 57
Geometrik yerler yardımiyle üçgenlerin çizimleri 59
V. Anlaşmalar 64

BÖLÜM VI

Giriş 65

Sahife

2° Paralelkenar 65
3° Dikdörtgen 69
4° Eşkenar dörtgen 70
5° Kare — 6° Yamuk 71
Eşit uzaklıkta paraleller 73
Bir üçgende kesişen doğrular 75
Bir çokgenin belli olma şartları 79
VI. Alıştırmalar 81

BÖLÜM VII

Dayire 84
Merkez ve çevre açıları 96
Çemberin teğetine ait çizimler 104
İki çemberin birbirine göre durumu ... 106
Bir üçgenin iç ve dış teğet çemberleri 115
Kirişler ve teğetler dörtgeni 117
VII. Alıştırmalar 120

BÖLÜM VIII

§ 1. Eşdeğerli şekiller ve alanlar 124
§ 2. Düzlem şekillerinin alanlarının hesabı 128
VIII, a. Alıştırmalar 134
§ 3. π (Pi) sayısı ve dairenin çevresi 136
§ 4. Dayirenin alanı 136
VIII. b. Alıştırmalar 140

BÖLÜM IX

Geometrik uzunluklarda oran ve orantı 141
Tales teoremleri 141
Tales teoreminin üçgen ve yamuğa uygulanması 144
IX. Alıştırmalar 149

BÖLÜM X

Üçgenlerin benzeşimi 151
Bir üçgenin açıortaylarının özellikleri 157
Dik üçgenlerde metrik bağıntılar 157
Alıştırmalar 164
Genel alıştırmalar 165